Curso preparatorio de Matemáticas y de Física

Departamento de Matemáticas

y Departamento de Física Aplicada

Universidad de Huelva

Autores

Departamento de Matemáticas

Juan Manuel Delgado Sánchez, Patricia Díaz Rosa, Mónica Esquivel Rosado, Antonio Lozano Palacio, Begoña Marchena González, Cándido Piñeiro Gómez, Ramón Rodríguez Álvarez, Enrique Serrano Aguilar e Inmaculada Ventura Molina.

Departamento de Física Aplicada

Juan Luis Aguado Casas, José Enrique García Ramos, Felipe Jiménez Blas, Francisco Pérez Bernal, José Rodríguez Quintero y Federico Vaca Galán.

La impresión de este documento ha sido financiada dentro de las actuaciones del Plan de Mejora de la Titulación de Ciencias Ambientales (Convocatoria 2006-08), en el Plan de Evaluación Institucional llevado a cabo por el PACU (Plan Andaluz de Calidad de las Universidades).

Para aprender a bordar, primero hay que saber coser

Juan María Arzak

Índice general

Introducción

Queridos alumnos:

Estos apuntes, que no pretenden ser ni sustituir a ningún libro de texto, van dirigidos a aquellos de vosotros que por vez primera cursáis alguna asignatura de Matemáticas o Física en la Facultad de Ciencias Experimentales; también a la mayoría de repetidores. Se pretende que sirvan de guía para los mini-cursos que desde el curso académico 2007-2008 se vienen impartiendo en esta Facultad. El origen de este mini-curso, cuáles son sus objetivos y cuál debería ser, a nuestro juicio, vuestra actitud ante el mismo son las cuestiones que motivan esta breve introducción.

En ocasiones, los profesores de Matemáticas y Física, nos quejamos de las dificultades que encontramos en nuestro trabajo y son muchas las veces que tenemos la sensación de predicar en el desierto. Recíprocamente, muchos de vosotros tenéis, de vez en cuando, la sensación de que el profesor habla para una especie de "super-alumno". Aunque entrar en un análisis pormenorizado de las causas que provocan estos desencuentros va más allá de las pretensiones de esta breve introducción, sí hay una cosa que está clara: por lo general, vuestra formación de carácter matemático y/o físico es francamente deficitaria. Así las cosas, el riesgo de fracaso es alto pues, como suele decir Juan María Arzak, "*para aprender a bordar, primero hay que saber coser*".

Si estamos de acuerdo en que hay un problema, la conclusión debería ser obvia: hay que intentar solucionarlo. Con este objetivo en mente se concibió este curso preparatorio. En él, intentaremos paliar la brecha existente entre el nivel teórico que deberíamos tener para cursar las asignaturas de matemáticas o física en la Facultad de Ciencias y el nivel que realmente tenemos. Estamos convencidos de que el camino que iniciáis, o continuáis, en la Facultad de Ciencias es un hermoso camino que merece ser hollado, de que aquí tendréis la oportunidad real de formaros como científicos y de que el esfuerzo merece la pena.

Es cierto que nuestro sistema educativo puede (y debe) ser criticado pero, al final, los problemas son nuestros y somos nosotros los que debemos solucionarlos. Endosar la causa de nuestras carencias a "*lo mal*" que lo hicieron nuestros educadores pasados puede ser cierto en muchos casos, pero no resuelve el problema. Este déficit inicial que padecemos puede y debe ser superado pero, para superarlo, sólo hay una receta: ¡TRABAJO!

Parte I

Matemáticas

Capítulo 1

Cálculo operacional

1.1. Potencia de un número real

Si a es un número real no nulo y $n \in \mathbb{N}$, se definen

$$a^n = a \overset{(n)}{\cdots} a \qquad , \qquad a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

5) $(a^n)^m = a^{nm}$

1.2. Raíces reales de un número real: Radicales

Si a es un número real y $n \in \mathbb{N}$, se llama ***raíz n-ésima*** de a a todo número real x tal que $x^n = a$ (así, en cierta forma, hablamos de invertir la potencia n-ésima).

¿Cuántas raíces n-ésimas tiene un número $a \in \mathbb{R}$?

- La única raíz n-ésima de 0 es 0. Escribimos $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Si n es par, todo $a > 0$ tiene dos raíces n-ésimas que son números opuestos. Las designaremos $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$.

- Si n es par y $a < 0$, no existe raíz n-ésima de a.
- Si n es impar, todo número real $a \neq 0$ tiene una única raíz n-ésima del mismo signo que a. Observemos que si n es impar y $a > 0$, entonces $(-\sqrt[n]{a})^n = -(\sqrt[n]{a})^n = -a$, lo que significa que $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Las consideraciones anteriores permiten en todos los cálculos que las raíces se puedan transformar en otras cuyo radicando es positivo por lo que en adelante sólo nos referimos a radicales $\sqrt[n]{a}$, con radicando $a > 0$ e índice $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

1) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p \cdot b^q}$ $\qquad \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} \cdot b^{nq}}$

2) $\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n]{a^p : b^q}$ $\qquad \sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{mp} : b^{nq}}$

3) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (sirve para extraer o introducir factores en un radical)

Los radicales se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, siéndoles de aplicación las propiedades de las potencias y, para los índices, la simplificación de fracciones produce radicales equivalentes y la reducción a común denominador radicales del mismo índice.

Las expresiones radicales $\alpha\sqrt[n]{a}$ y $\beta\sqrt[m]{b}$ se denominan semejantes si $n = m$ y $a = b$. Se pueden efectuar sumas y restas de expresiones radicales semejantes.

Ejemplo 1.2.1.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + 7\sqrt[3]{2^6 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^4} \\
&= 2\sqrt[3]{3} + 2^2 \cdot 7\sqrt[3]{3} - 2 \cdot 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\
&= (2 + 28 - 10 - 3)\sqrt[3]{3} \\
&= 17\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Racionalizar una expresión fraccionaria en la que aparecen radicales en el denominador es transformarla en otra equivalente cuyo denominador no contenga raíces. Los casos más habituales de racionalización son los siguientes:

- En el denominador aparece un factor radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$: Se multiplican numerador y denominador de la fracción por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplos 1.2.2.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{3} = 2\sqrt[5]{3^3}$$

- En el denominador aparece una suma o una diferencia con raíces cuadradas: Se multiplican numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador (el conjugado de la suma es la diferencia y viceversa).

Ejemplos 1.2.3.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$$

1.3. Logaritmos

Si $b > 0$ y $b \neq 1$ se llama ***logaritmo en base* b *de* a** $> \mathbf{0}$ al exponente $x \in \mathbb{R}$ al que se debe elevar b para que dé como resultado a. Es decir $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Propiedades

1) $\log_b b = 1$ y $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

3) $\log_b(a : c) = \log_b a - \log_b c$

4) $\log_b(a^p) = p \log_b a$

5) $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\log_b a$

6) $\log_b a = \log_d a \cdot \log_b d$ (Cambio de base).

1.4. Monomios y polinomios

Monomio en la ***indeterminada*** x es toda expresión de la forma ax^n donde el número real a es el ***coeficiente*** y el número natural n su ***grado.***

Los monomios ax^n y bx^m coinciden si $a = b$ y $n = m$.

Se pueden sumar o restar monomios del mismo grado: $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$.

Se pueden multiplicar monomios arbitrarios: $(ax^n) \cdot (bx^m) = (ab)x^{n+m}$.

Si $n \geq m$, $(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m}$.

Polinomio es una suma indicada de monomios. El grado del polinomio es el grado de su monomio de mayor grado. El polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$, es de grado n, su coeficiente principal es a_n y su término independiente es a_0.

División de polinomios: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con $\mathrm{gr}[P(x)] \geq \mathrm{gr}[Q(x)]$, existen $C(x)$ y $R(x)$, únicos, tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \text{y} \quad \mathrm{gr[R(x)] < gr[Q(x)]}$$

El grado de $C(x)$ siempre es igual a la diferencia entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

En el caso de ser $R(x) \equiv 0$, decimos que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$ ó que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$.

Teorema del resto

Si $a \in \mathbb{R}$, el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por el binomio $x - a$ es igual al valor numérico $P(a)$.

En particular, $P(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $P(a) = 0$.

La regla de Ruffini permite hacer las divisiones del tipo $P(x) : (x - a)$ con comodidad.

Ejemplo: Si queremos dividir $-x^4 + 3x^3 - 15x + 7$ entre $x + 2$, por la regla de Ruffini procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 3 & 0 & -15 & 7 \\
-2 & \downarrow & 2 & -10 & 20 & -10 \\
\hline
 & -1 & 5 & -10 & 5 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{-3}}
\end{array}$$

de forma que el cociente de la división es $-x^3 + 5x^2 - 10x + 5$ y el resto es -3.

1.4.1. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es descomponerlo en factores irreducibles de alguna de las formas $(x - a)$ ó $(px^2 + qx + r)$ con $q^2 - 4pr < 0$. Para conseguirlo necesitamos hallar sus raíces reales.

Raíz (ó cero) de $P(x)$ es todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(a) = 0$ lo que, según hemos visto anteriormente, equivale a que $(x - a)$ es un divisor de $P(x)$.

Algunas pautas a seguir en la localización de raíces y la factorización de un polinomio:

- Las raíces enteras del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre los divisores de su término independiente a_0.

- Las raíces racionales de un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros se encuentran entre las fracciones $\dfrac{p}{q}$ tales que su numerador p es divisor de a_0 y su denominador q es divisor del coeficiente principal a_n.

- Cada vez que encontremos una raíz, a, del polinomio $P(x)$, podemos dividir $P(x)$ por $(x-a)$ y seguir con el polinomio cociente que tiene grado inferior en una unidad.

- El cálculo las raíces irracionales de un polinomio de grado superior a dos es un problema que no abordamos de momento. Las raíces irracionales de un polinomio de segundo grado se obtienen resolviendo la ecuación correspondiente.

- Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Ejemplo 1.4.1. Si consideramos el polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, sus posibles raíces enteras son 1 y -1. Como $P(1) = 8$, 1 no es raíz; al ser $P(-1) = 0$, -1 sí es raíz. Dividimos $P(x)$ entre $(x+1)$ obteniendo que $P(x) = (x+1)(2x^4+x^3+x^2+x-1)$. Como $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ vuelve a tener la raíz -1, volvemos a dividir por $(x + 1)$ obteniendo que $P(x) = (x + 1)^2(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$. Comprobamos que -1 no es raíz de $(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$ y obtenemos que sus posibles raíces racionales son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Al ser $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$ y $P(\frac{1}{2}) = 0$, tiene la raíz racional $\frac{1}{2}$ y podemos dividir por $(x-\frac{1}{2})$, obteniendo así que $P(x) = (x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2)$. Ya que el cociente resultante $2x^2 + 2$ no tiene raíces reales, la descomposición factorial de $P(x)$ es $P(x) = 2(x + 1)^2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)$.

1.4.2. Potencia n-ésima de un binomio (Binomio de Newton)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define el ***factorial de*** $k > 0$ como $k! = 1 \cdot 2 \cdot (k-1) \cdot k$. Se conviene que sea $0! = 1$.

Se verifica que $k! = (k-1)! \cdot k$.

Se define el ***número combinatorio*** de numerador n y orden k como $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ para cada $k = 0, 1, \cdots, n$.

Se puede comprobar con facilidad que son ciertas las siguientes identidades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \;\; ; \;\; \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \;\; ; \;\; \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y a y b son números reales, se verifica:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Algunos casos particulares:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $\qquad$ $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

1.5. Valor absoluto

Dado un número $x \in \mathbb{R}$, se define el ***valor absoluto*** de x como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Propiedades

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $-|x| \leq x \leq |x|$

4) $|x| = |-x|$, en particular $|x-y| = |y-x|$

5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, en particular $|x|^2 = |x^2| = x^2$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

7) Si $r > 0$ se tienen que $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$ (la equivalencia sigue siendo cierta si cambiamos $\leq$ por $<$)

8) $|x| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ó} \\ x \leq -k \end{cases}$ (la propiedad se mantiene considerando todas las desigualdades estrictas)

9) Desigualdad triangular $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

10) $|x-y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|$

11) $|x| = c \Rightarrow x = \pm c$ en particular $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

Notas:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$, más general si $n \in \mathbb{N}$ es par, $|x| = \sqrt[n]{x^n}$.

(2) $|a-b| = |b-a|$ representa la distancia entre a y b. Por tanto el valor absoluto de un número representa la distancia del punto al origen. Observe que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, $|3| = 3$, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3, $|-3| = 3$.

1.6. Desigualdades. Propiedades

Las siguientes propiedades se deducen de los axiomas de orden. Éstas nos serán útiles a la hora de trabajar con números reales, en especial con inecuaciones.

1) Propiedad transitiva. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

2) Si $a < b$ se tiene que $a + c < b + c$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

3) Si $a < b$ y $c > 0$ se tiene que $a \cdot c < b \cdot c$.

4) Si $a < b$ y $c < 0$ se tiene que $a \cdot c > b \cdot c$.

5) Si $a < b$ es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.

6) Si $a \cdot b > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos.

7) Si $a \cdot b < 0$ entonces a y b tienen signos opuestos.

1.7. Ecuaciones. Definiciones y propiedades básicas

- Una ***ecuación*** es una igualdad que contiene una o más incógnitas.
- Hay muchas formas de clasificar las ecuaciones, una de ellas consiste en expresar el número de incógnitas.

  Ejemplo: $3x - 2y = 5$ es una ecuación con dos incógnitas x e y.
- El ***grado*** de una ecuación con una incógnita y expresada a través de una igualdad polinómica coincide con el grado del polinomio.

  Ejemplo: $4x^3 + 7x^2 + 2 = 0$ es una ecuación de grado 3.

- Resolver una ecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la igualdad se cumpla.

  Ejemplo: $x^2 - 9 = 0$ es una ecuación con una incógnita x y dos soluciones, $x = -3; x = 3$.

- Debemos tener cuidado ya que no todas las ecuaciones tienen solución.

  Ejemplo: En el conjunto de los números reales no existe x tal que $x^2 + 1 = 0$ tenga solución.

- No debe confundirse ecuación con identidad.

  Ejemplo: La expresión $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ no es una ecuación sino una identidad, ya que ésta se cumple de forma universal para cualquier valor de x que tomemos.

  Una sencilla técnica para comprobar que estamos ante una identidad consiste en pasar todos los términos a un solo miembro de la igualdad y obtendremos $0 = 0$ (compruébese en el ejemplo).

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de ecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$, siendo a, b y c números reales.

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número real distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente, esto es: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, siendo a, b, $c \neq 0$, números reales.

-> *Regla 3*: Si el producto de dos números reales es igual a cero, entonces al menos uno de los números debe ser igual a cero, esto es: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$, siendo a y b números reales.

1.7.1. Tipos de ecuación, técnicas de resolución y ejemplos

I) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes enteros.

Técnica: pasamos la incógnita a un miembro de la igualdad y los coeficientes al otro, usando las reglas vistas en la sección anterior.

Ejemplo: Resolver $3x - 44 = 2x - 35; \Rightarrow 3x - 2x = 44 - 35 \Rightarrow$ la solución es $x = 9$

II) Ecuación lineal con una incógnita y con coeficientes racionales.

Técnica: Multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes y queda reducida al caso I).

Ejemplo: Resolver $\dfrac{x-3}{6}+\dfrac{2x-1}{3}=5(x-2)+5$; dado que m.c.m$(3,6)=6$, multiplicamos la ecuación por 6, tenemos $x-3+4x-2=30(x-2)+30 \Rightarrow x+4x-30x=3+2-60+30 \Rightarrow -25x=-25 \Rightarrow$ la solución es $x=1$.

iii) Ecuación con una incógnita, polinómica de segundo grado.

Técnica: Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, con $a\neq 0$.

Ejemplo: Resolver $4x^2+5x-9=0$.

iv) Ecuación con una incógnita, polinómica de grado mayor o igual a tres.

Técnica: Se pretende factorizar el polinomio, para ello podemos intentar hallar las raíces aplicando la regla de Ruffini.

v) Si la ecuación es bicuadrada, es decir de la forma $ax^4+bx^2+c=0$ entonces la fórmula de la ecuación de segundo grado nos permite hallar la solución, previo cambio de variable.

Ejemplo: $x^4-10x^2+9=0$, es una ecuación bicuadrada $\Rightarrow x^2=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow x^2=9; x^2=1 \Rightarrow$ las soluciones son: $x=-3, x=-1, x=1, x=3$.

vi) Ecuación con radicales y con una incógnita.

Técnica: Aunque no siempre es eficaz, se suele pasar la raíz a un miembro de la igualdad y se elevan ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz. Hay que comprobar si las soluciones que se obtienen por este método son soluciones de la ecuación original.

Ejemplo: Resolver $x-2+\sqrt{x}=0$, dejamos la raíz sola $\sqrt{x}=2-x$, elevando al cuadrado $x=4-4x+x^2$, resolviendo $x=4; x=1$, pero la única solución es $x=1$ (compruébese).

vii) Ecuación logarítmica con una incógnita.

Técnica: Se utilizan las propiedades básicas de los logaritmos junto a que si $A>0; B>0$ se tiene que $\ln(A)=\ln(B) \Leftrightarrow A=B$.

Ejemplo: Resolver $\ln(x)+\ln(100)=2, \Rightarrow \ln(100x)=\ln(e^2) \Rightarrow x=\dfrac{e^2}{100}$.

viii) Ecuación exponencial con una incógnita.

Técnica: Se deben aplicar las propiedades de las exponenciales, teniendo además en cuenta que: Si $a>0$ se tiene que $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$.

Ejemplo: Resolver $2^{x+5}=16, \Rightarrow 2^{x+5}=2^4, \Rightarrow x+5=4, \Rightarrow$ la solución es $x=-1$.

Nota 1.7.1. Existen muchos otros tipos de ecuaciones, por ejemplo las trigonométricas para cuya resolución se han de tener presente las fórmulas de trigonometría. Además, cuando hay varias incógnitas y varias ecuaciones estamos ante lo que se denominan sistemas de ecuaciones (téngase en cuenta ahora que cada ecuación puede ser de algún tipo de las anteriores). Las técnicas de resolución son muy variadas y se adaptan a cada sistema en particular. Por ejemplo, los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas se suelen resolver mediante las famosas técnicas de: sustitución, igualación y reducción. Además se pueden resolver por métodos geométricos dibujando en el plano los puntos representados por cada una de las ecuaciones.

1.7.2. Ecuaciones con valores absolutos

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de ecuaciones.

Ejemplo 1.7.2. Resolver la ecuación $|x-3| = 5$. Como

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

quiere decir que tenemos dos ecuaciones

$$\begin{cases} x-3 = 5 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) = 5 & \text{si} \quad x-3 < 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $x = 8$ y satisface $x-3 \geq 0$, por tanto es solución de nuestra primitiva ecuación. De la segunda obtenemos que $x = -2$ y satisface $x-3 \leq 0$, por tanto también es solución de nuestra primitiva ecuación. Hemos obtenido dos soluciones de la ecuación planteada.

1.8. Inecuaciones

- Una ***inecuación*** es una desigualdad que contiene una o más incógnitas.

- Resolver una inecuación consiste en hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que la desigualdad se cumpla. Las soluciones de inecuaciones no tienen por qué ser ahora puntos aislados sino que nos podemos encontrar como solución la unión de intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos. El proceso de resolución es análogo al de resolución de ecuaciones salvo en algunos detalles.

Propiedades que se usan en el proceso de resolución de inecuaciones:

-> *Regla 1*: Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra inecuación equivalente, esto es: $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$, siendo a, b y c números reales. (ídem con $\leq$)

-> *Regla 2*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real POSITIVO, se obtiene una inecuación equivalente, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c > 0 \text{ (ídem con } \leq)$$

-> *Regla 3*: Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o dividen por un número real NEGATIVO, se obtiene otra inecuación equivalente, donde la desigualdad cambia de sentido, esto es:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \text{ siendo } a,\ b,\ c \text{ números reales con } c < 0$$

(ídem si las desigualdades no son estrictas)

1.8.1. Inecuaciones con valores absolutos

Igual que en las ecuaciones con valor absoluto, para resolver inecuaciones con valor absoluto se intenta quitar éste haciendo uso de la definición y propiedades del valor absoluto, después se sigue la misma técnica de resolución de inecuaciones. En particular, se usan las propiedades del valor absoluto:

7) $|x| < r$ si y sólo si $-r < x < r$, válido con $\leq$.

8) $|x| > k$ si y sólo si $x < -k$ ó $x > k$, válido con $\geq$.

Estas equivalencias nos permitirán resolver inecuaciones con valores absolutos al transformarlas en inecuaciones sin valor absoluto.

Ejercicios y problemas

1. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\dfrac{(4\cdot 3^2\cdot 6^{-2})^2\cdot(2^3\cdot 3^4)^{-1}}{(2^6\cdot 3^7)^{-3}\cdot(6^4)^3}$ *b)* $\left(-2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-2}$ *c)* $\dfrac{(a\cdot b)^2\cdot(a^{-3}\cdot b^3)^3}{(a\cdot b^2\cdot c^3)^{-5}}$

2. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[8]{81}$ *b)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}:\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

c) $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\sqrt{45}$ *d)* $\dfrac{3^{-\frac{3}{4}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{3})^{-3}\cdot\sqrt{81}}$

3. Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *c)* $\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{4}}$ *d)* $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ *e)* $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

4. Efectuar simplificando al máximo los resultados:

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt[2]{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$ *b)* $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

c) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

5. Mediante la definición, calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ *b)* $\log_{\frac{1}{2}} 32$ *c)* $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)$ *d)* $\log_{10} 0'001$ *e)* $\log_{\frac{1}{2}} 4$

f) $\log_{\frac{1}{10}} 10$ *g)* $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right)$

6. Calcular:

a) $\log_3 729-\log_2 128+\log_5 125-\log_{11} 121$ *b)* $\log_3\dfrac{1}{3}+\log_2\dfrac{1}{8}-\log_4\dfrac{1}{16}+\log_5\dfrac{1}{25}$

c) $\left(3^{\log_2 4}\right):\log_8 2$

7. Expresar como un solo logaritmo en base 10:

a) $3(\log 5+\log 2)-\log 2-\log 7$ *b)* $\dfrac{3}{2}(1-\log 5)+\dfrac{1}{2}\log 2$ *c)* $3\log 2-1+\dfrac{\log 5}{3}$

8. Efectuar las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(3x-2)^3$

b) $(-x^2+\sqrt{2}x)(x^2+\sqrt{2}x)$

c) $\left(\dfrac{2}{3}x+3x^2-5x^3+1\right)\cdot\left(5-2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$

d) $(3x^2-2)(5x-4)-[2x(x^2-1)-(3x+2)(5x^2+4)]$

e) $2x[(3x-4)-(2x+1)]-(5x+4)[2x(3x-1)+2x(x-3)]$

9. Hallar el cociente y el resto en las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(7x^5+4x^4-3x^3-12x^2+5):(x^3+2x)$

b) $(6x^3+2x-3):(x-5)$

c) $(x^4-5x^2+1):(x^2-1)$

10. Hallar el valor de m y n sabiendo que la división $(x^4-5x^3+4x^2+nx-m):(x^2-2x+3)$ es exacta.

11. Calcular $m \in \mathbb{R}$ para que

a) (x^3-3x+m) sea divisible por $(x-2)$.

b) $(2x^3+mx^2-x+3)$ sea divisible por $(2x+3)$

12. Calcular las raíces enteras y fraccionarias de los polinomios siguientes y descomponerlos en factores:

a) $4x^3-20x^2-x+5$ *b*) $x^4-2x^3-4x^2+8x$ *c*) x^5-x
d) $6x^3+13x^2+x-2$ *e*) $8x^3-62x^2-17x+8$ *f*) $64x^4-20x^2+1$
g) $x^4+x^3-x^2-11x+10$

13. ¿Qué sumando debemos añadir a $16x^4+40x^2$ para obtener un cuadrado perfecto?

14. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $(x-1)^5$ *b*) $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^3$ *c*) $(2x+3)^4$
d) $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ *e*) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)^5$ *f*) $(2x-1)^2$

15. Determinar el coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{21}$. ¿Aparece x^7 en el desarrollo anterior?

16. En las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, factorizar los polinomios convenientes, efectuar las operaciones indicadas y simplificar al máximo el resultado:

a) $\dfrac{2}{x^3-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ *b*) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-8x-5}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}-\dfrac{4x^2}{x^4-1}-\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x+1}$ *d*) $\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right):\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$

e) $\left(x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2}\right)$ *f*) $\dfrac{x^2}{x+1}:\left[x-(x^2-1):\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

17. Convertir cada una de las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto:

a) $|2x-1|>1$ *b*) $|2-5x|\leq 3$ *c*) $4-|1-x|\leq 1$
d) $2|x-2|-1\leq 2$.

18. Escribir las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos:

a) x está a más de 3 unidades de -7.

b) x está al menos a 3 unidades de 5.

c) x dista de 7 en menos de 3 unidades.

d) El número de horas que trabaja una máquina sin interrupciones, x, difiere de 12 en menos de 2 horas.

19. Describir y representar el conjunto determinado por cada una de las siguientes condiciones:

a) $|x|<1$ *b*) $|x|\leq 3$ *c*) $|x|\geq 1$ *d*) $|x|>12$
e) $|-x|\leq 2$ *f*) $|x|<-2$ *g*) $|x|\geq -2$ *f*) $|-x|\geq -2$

20. Determinar si cada una de las siguientes igualdades es una ecuación o una identidad:

a) $(x-2)^2=x^2-4x+4$

b) $(x-3)(x+3)=x^2-9+6x$

c) $(x-3)^2+5=x-4$

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones:

21. $\dfrac{x-5}{6}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{12}+\dfrac{x+2}{4}$

22. $x+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{2x-1}{18}=0$

23. $12x^2+15x-18=0$

24. $x^3-9x^2=15-23x$

25. $\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x-3}$

26. $\sqrt{-x+2}-1=0.5\sqrt{x+6}$

27. $2^x+2^{x+1}-24=0$

28. $25^x-30\cdot 5^x+5^3=0$

29. $\log_{10}(x)+\log_{10}(50)=3$

30. $2\log_{10}(x) - \log_{10}(x-16) = 2$

31. Resolver por igualación, sustitución y reducción. Comprueba el resultado gráficamente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ x + 3y = 5; \end{cases}$$

32. Resolver:

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 3 = 0; \\ x - y = 2; \end{cases}$$

33. Resolver:

a) $|x-4| = 3$ *b*) $3|5-4x| = 9$ *c*) $|x-5| = -2$
d) $|x| = x+1$ *e*) $|x| = x-1$

34. Encontrar todos los puntos cuya distancia a 3 es igual a 4.

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

35. $|2x-1| \leq 3$

36. $10 - 3|2x-3| < 4$

37. $|x+4| \geq 7$

38. $|x-1| \leq -34$

39. $1 - |2x-3| < 4$

40. $|x-3| \leq 0$

41. $\dfrac{|6x-6|}{3} = 1$

42. $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| \leq 4$

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

43. $|2x-3| < 1$

44. $(x-2)^2 \geq 4$

45. $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

46. $|x| = x+5$

47. $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

48. $|x| = x - 5$

49. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$

50. $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$

51. $\Big||x| - 2\Big| \leq 1$

52. $\Big||2 - 3x| - 1\Big| > 2$

53. $|(x^2 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^2 - 4| - |x^2 + 2|$

54. $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x + 3$

55. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2 - 5x + 1 = (x-1)^2$ *b*) $9x^2 + 30x + 25 = 0$

c) $3x^2 + 5 = 4x^2$ *d*) $(x + \frac{1}{2})^2 = x - 4$

56. Escribir una ecuación polinómica cuyas soluciones sean:

a) $x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$ *b*) $x = 0$ doble, $x = -4$ doble.

57. Escribir una ecuación polinómica de grado 2 cuyas soluciones sumen 3 y su producto sea 9.

58. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas bicuadradas:

a) $6x^4 - 5x^2 = 0$ *b*) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

59. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$ *b*) $4x^4 - 49 = 0$ *c*) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

60. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{2x^3 + 6x^2 + 8x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ *b*) $\dfrac{3x}{x^2 - 9} = \dfrac{5}{x - 3}$

61. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $4x - 5\sqrt{x} = 0$ *b*) $\sqrt{x - 2} = x - 8$ *c*) $\sqrt[3]{2x - 1} = x$

62. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{6x-5} - e = 0$ *b*) $5 \cdot 3^{x+1} - 2 \cdot 3^x = 39$

63. Resolver las inecuaciones:

a) $3x - 1 \geq 7x + 7$ *b*) $\dfrac{6 - 2x}{9} > \dfrac{1 - x}{6}$

64. Resolver las inecuaciones:

a) $4x^2 + 6x - 1 < 3x^2 + 7x + 11$ *b*) $3x^3 + 36 \leq x^4 - 13x^2 + 51x$

65. Resolver la inecuación $\dfrac{4x}{(1+x)^2} \geq 1$

66. Resolver la inecuación $\sqrt{1+x} > \sqrt{1-2x}$

Capítulo 2

Trigonometría

2.1. Medida de ángulos: el radián

La Trigonometría es la parte de la Matemática que se ocupa de la medida de los lados y ángulos de un triángulo a partir del conocimiento de algunas de estas medidas (*trigonos* es una palabra griega que significa triángulo). Un ángulo es una porción del plano limitada por dos semirrectas que parten de un mismo punto O, llamado vértice. Las semirrectas que lo delimitan se denominan lados del ángulo (Figura 2.1).

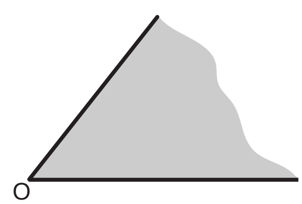


Figura 2.1: Un ejemplo de ángulo

Para medir ángulos usaremos una medida adimensional cuya unidad se denomina radián. Supongamos que se desea medir el ángulo representado en la Figura 2.1. Para ello, con centro en O, trazamos un arco de circunferencia de radio r que intercepta con los lados en los puntos A y B (ver Figura 2.2). Si ℓ denota la longitud del arco de extremos A y B, tomaremos el cociente $\alpha = \frac{\ell}{r}$ como medida del ángulo y diremos que el ángulo mide α radianes. Un ángulo cuya medida es un radián es aquel que tiene la propiedad de que el radio r coincide con la longitud ℓ del arco de extremos A y B.

Nótese que el radián es adimensional pues se trata de un cociente de dos longitudes. La medida de ángulos que acabamos de introducir no sería consistente si pudiera ocurrir que al escoger otro radio r', para trazar el arco de circunferencia con centro O, el cociente ℓ'/r' no coincidiera con ℓ/r, donde ℓ' denota la longitud del arco de circunferencia de extremos A' y B' (Figura 2.3). Por tanto, antes de dar por buena la definición debemos probar que

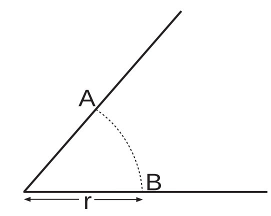


Figura 2.2: Definiendo el radian

se verifica la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$, cualesquiera que sean los radios r y r'. Para probar esta igualdad, necesitamos el Teorema de Tales sobre triángulos semejantes.

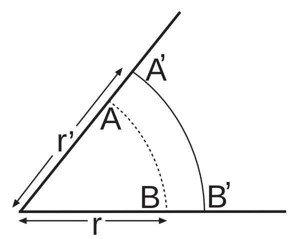


Figura 2.3: La definición de radian es independiente del radio elegido

Teorema 2.1.1 (Tales)**.** *Consideremos un triángulo cualquiera ABC y tracemos una recta paralela a uno de sus lados (paralela al lado AB, por ejemplo). Sean M y N los puntos donde dicha recta intersecta a los otros lados. Entonces los triángulos ABC y MNC son semejantes (Figura 2.4)*

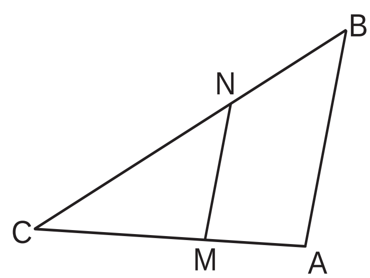


Figura 2.4: Triángulos semejantes

El hecho de ser semejantes ambos triángulos se traduce en que se tienen las siguientes relaciones entre sus lados y ángulos:

I. Los ángulos homólogos son iguales, es decir, $\hat{A} = \hat{M}$ y $\hat{B} = \hat{N}$.

II. Las longitudes de sus lados son proporcionales, es decir, se verifica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = k,$$

donde la constante k es un valor estrictamente positivo que recibe el nombre de razón de semejanza.

Ahora podemos abordar la prueba de la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$: si dividimos el ángulo representado en la Figura 2.3 en n partes iguales y trazamos las cuerdas de cada uno de los n ángulos resultantes, obtenemos como resultado una forma similar a la representada en la Figura 2.5 (nótese que, para una mayor claridad, en la figura se ha representado el caso concreto $n = 3$). Si n es suficientemente grande, las longitudes de las poligonales inscritas a los correspondientes arcos de circunferencia son una buena aproximación de las longitudes de dichos arcos y esta aproximación es tanto más buena cuanto mayor es n. Si p_n y p'_n denotan las longitudes de estas poligonales, bastará probar que $p'_n/r' = p_n/r$, cualquiera que sea el valor de n,

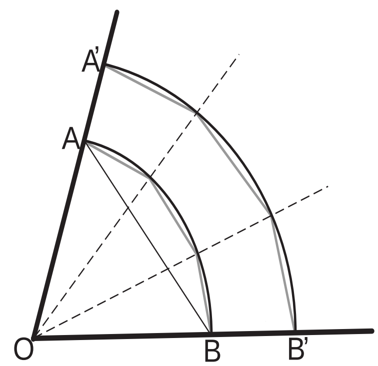


Figura 2.5: División de un ángulo en partes iguales

con lo que demostraríamos la igualdad $\ell'/r' = \ell/r$. Veamos entonces que se verifica la igualdad $p'_n/r' = p_n/r$, para todo valor de n. Para ello, nos ayudamos de la Figura 2.6 que representa uno de los n ángulos en que hemos dividido el ángulo inicial. Los triángulos OA_0B_0 y $OA'_0B'_0$ son semejantes, por ser paralelas las cuerdas A_0B_0 y $A'_0B'_0$, y por tanto tienen sus lados proporcionales, lo que nos permite obtener la igualdad $r'/r = \overline{A'_0B'_0}/\overline{A_0B_0}$. Dividiendo ahora por n y teniendo en cuenta que $p_n = n \cdot \overline{A_0B_0}$ y $p'_n = n \cdot \overline{A'_0B'_0}$, se obtiene fácilmente la igualdad deseada, esto es, $\frac{p'_n}{r'} = \frac{p_n}{r}$.

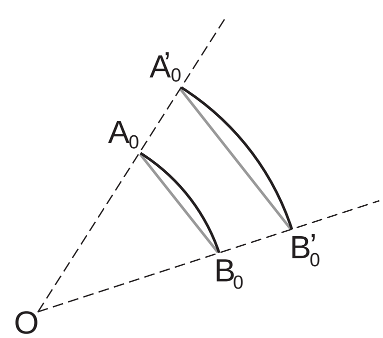


Figura 2.6: Uno de los ángulos de la subdivisión representada en la Figura 2.5

Ejemplos

a) Un arco correspondiente a cierto ángulo mide 12 cm y su radio 4 cm. ¿Cuántos radianes mide el ángulo?

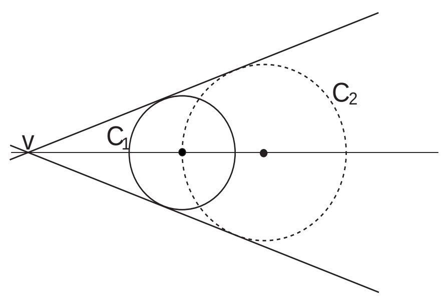
b) ¿Cuántos radianes mide un ángulo recto?

c) Un ángulo mide 2.5 radianes. Si dibujamos un arco de radio 4 cm, ¿cuál es la longitud del arco?

d) Un ángulo mide 1.2 radianes y uno de sus arcos mide 6 cm. ¿Cuánto mide el radio con el que se ha trazado dicho arco?

e) Sabiendo que $180° = \pi\, rad$ calcular, aproximadamente, cuántos grados mide un radián.

f) Consideremos una circunferencia C_1 de radio $r_1 = 5$ cm, tangente a las semirrectas de vértice V. La distancia del vértice al centro de la circunferencia es de 15 cm. Se traza otra circunferencia C_2 que pase por el centro de C_1 y también tangente a ambas semirrectas. Calcular el radio de C_2.



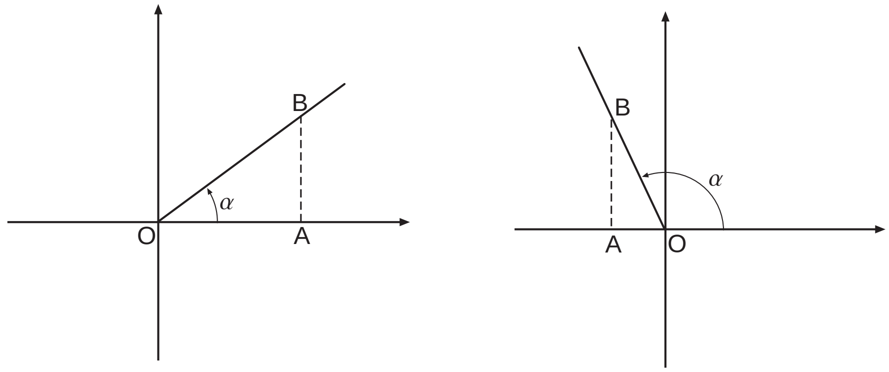
2.2. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas básicas son el seno (que denotaremos por sen) y el coseno (que denotaremos por cos) pues, como veremos más adelante, el resto de razones se definen a partir de ellas. Tanto el seno como el coseno son periódicas de período 2π. Esto significa que para cualquier valor α se verifica que

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \text{ y } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$

y por ello basta definir $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$. En todos los casos, se procederá como sigue: dado el ángulo con vértice en O, se escoge un punto B en uno de sus lados y se traza la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al otro lado, al que corta en un punto que denotaremos por A (Figura 2.9).

Se define entonces $\operatorname{sen}\alpha$ como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa del triángulo OAB, con signo positivo o negativo según el cuadrante al que pertenezca el ángulo en cuestión, como se describe de forma precisa en las figuras 2.7 y 2.8.



$0 < \alpha < \pi/2$ $\qquad\qquad$ $\pi/2 < \alpha < \pi$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}; \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \quad \cos\alpha = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Figura 2.7: Definición de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en el primer y segundo cuadrantes

Es importante señalar que las definiciones de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ son independientes de la elección del punto B. Más concretamente, supongamos que se considera el ángulo de la Figura 2.9 y trazamos perpendiculares por los puntos B y B'. Por el Teorema de Tales, los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, pues los lados AB y $A'B'$ son paralelos. Entonces sus lados son proporcionales, luego se verifica la igualdad

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}.$$

O lo que es igual

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}},$$

lo que prueba que la definición de $\operatorname{sen}\alpha$ es independiente del punto B. De manera similar se comprueba la independencia de la definición de $\cos\alpha$ en lo que respecta a la elección de B.

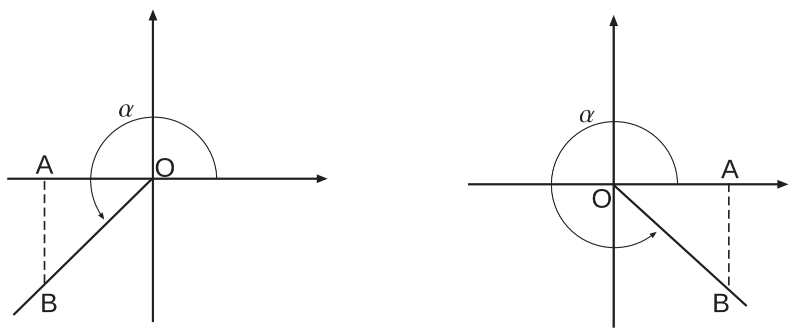
Existe una relación fundamental entre $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, que se deduce directamente al aplicar el Teorema de Pitágoras, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.2.1 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Esto es, en un triángulo rectángulo como el de la Figura 2.10, que es rectángulo en A y por tanto tiene como catetos los lados b y c y por hipotenusa el lado a, se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.

Ya estamos en condiciones de obtener la **relación fundamental** que relaciona $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Cualquiera que sea el ángulo α, se verifica que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$



$\pi < \alpha < 3\pi/2$ $\qquad$ $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}}; \quad \cos\alpha = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Figura 2.8: Definición de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en el tercer y cuarto cuadrantes

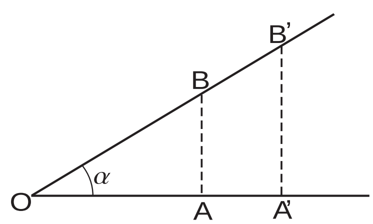


Figura 2.9: Las definiciones de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ son independientes de B

Para probar esta identidad, vamos a considerar nuevamente la Figura 2.9. Si calculamos la expresión $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, de acuerdo con las definiciones, obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AO}^2}{\overline{OB}^2} = 1,$$

donde la última igualdad no es otra cosa que el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo OAB de la Figura 2.9.

De la relación fundamental se deduce además que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ y que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Como ya se indicó al principio del tema, a partir del seno y del coseno es posible definir las restantes razones trigonométricas. De esta forma, dado un ángulo α se definen la tangente, la cotangente, la cosecante y la secante de α como:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Es importante señalar que tanto la tangente como la cotangente son periódicas y más concretamente, tienen periodo π. La prueba es muy fácil, basta tener en cuenta que

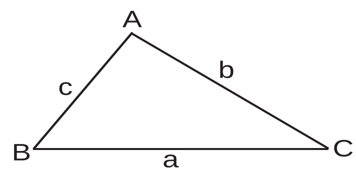


Figura 2.10: Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$)

$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. Por tanto, resulta

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ejemplo

Completar la siguiente tabla:

	$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/6$	$\alpha = \pi/4$	$\alpha = \pi/3$	$\alpha = \pi/2$
$\operatorname{sen}\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					

Todas las razones trigonométricas pueden representarse geométricamente, mediante una circunferencia de radio unidad, que recibe el nombre de circunferencia goniométrica (Figura 2.11). Como puede observarse, para cada valor de α el par $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ representa las coordenadas de un punto de la circunferencia unidad.

2.3. Resolución de triángulos arbitrarios

Describiremos en esta sección dos resultados útiles para la resolución de un triángulo cualquiera a partir de las relaciones existentes entre sus lados y ángulos.

Teorema 2.3.1 (Teorema del seno)**.** *En un triángulo ABC cualquiera, la longitud de cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto. Es decir,*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

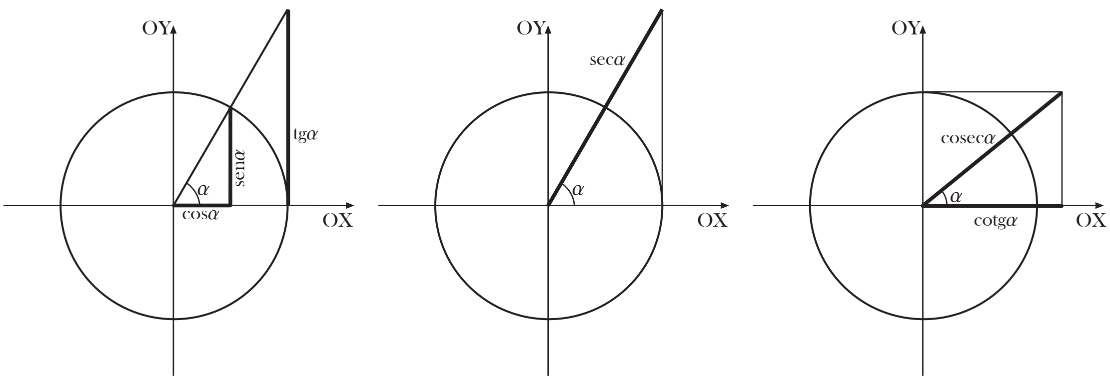


Figura 2.11: La circunferencia goniométrica

Teorema 2.3.2 (Teorema del coseno)**.** *En un triángulo ABC cualquiera el cuadrado cada uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el producto de ambos por el coseno del ángulo que forman. Esto es,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \quad y \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}.$$

2.4. Resumen de fórmulas

Finalizaremos el capítulo con una relación de relaciones y fórmulas trigonométricas que serán de gran utilidad para la resolución de los problemas.

- $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
- $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$.
- $\operatorname{sen}2\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.
- $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.
- $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

Ejercicios y problemas

1. El radio de una circunferencia mide 18 cm. ¿Cuál es la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de 75°?

2. ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de un sector circular de n grados de amplitud?¿Y si el ángulo del sector se expresa en radianes?

3. Expresar en radianes las siguientes medidas: 45°, 150°, 210°, 315°.

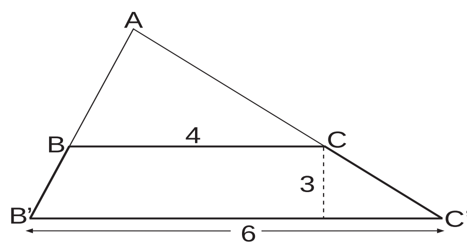
4. Expresar en grados sexagesimales: $2\pi/3\,rad$, $\pi/5\,rad$, $3\pi/8\,rad$.

5. Ordenar, de menor a mayor, las siguientes medidas de ángulos: 18°, $\pi/6\,rad$, 14°, $0.4\,rad$.

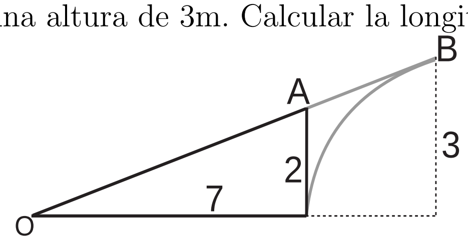
6. Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 80 m. de largo que forma con el suelo horizontal un ángulo de 70°. Suponiendo que el cordel esté recto, calcular distancia del globo al suelo.

7. Si las puntas de los brazos de un compás distan entre sí 6.25 cm y cada brazo mide 11.5 cm, ¿qué ángulo forman los brazos?

8. Para calcular el área del triángulo AB'C' disponemos únicamente de los datos del trapecio de la figura. Hallar dicho área.



9. Un rampa de saltos de exhibición para motocicletas se quiere prolongar de manera que el motorista salte desde una altura de 3m. Calcular la longitud AB.



10. Un poste vertical de dos metros proyecta una sombra de 0.8 m. A la misma hora, la torre de una iglesia es de 24.8 cm. Determinar la altura de la torre.

11. Determinar los valores de las razones trigonométricas del ángulo α si P es un punto del lado terminal, siendo el inicial OX y las coordenadas de P

a) $P = (6, 8)$ *b*) $P = (-6, 8)$ *c*) $P = (-3, -4)$

d) $P = (-1, 5)$ *e*) $P = (4, -7)$ *f*) $P = (5, -12)$

12. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos $\pi/6\,rad$, $\pi/4\,rad$, $\pi/3\,rad$, $7\pi/12\,rad$, $25\pi/24\,rad$, $47\pi/12\,rad$.

13. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas, sabiendo que

a) $\text{cotg}\,\alpha = \frac{12}{5}$ *b*) $\text{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *c*) $\sec\alpha = -\sqrt{5}$
d) $\text{sen}\alpha = -\frac{2}{3}$ *e*) $\text{cosec}\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *f*) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

14. Simplificar las expresiones

a) $\cos^2 x - 2(1+\cos x)\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}$ *b*) $\frac{1}{2\,\text{sen}(\pi/18)} - 2\,\text{sen}(7\pi/18)$

15. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\text{sen}\,(2x)\cos x = 3\,\text{sen}^2\,x$ *b*) $tan(2x) = -tan\,x$

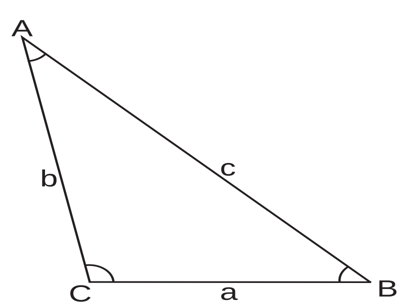
c) $\cos^2(2x) = \sin^2\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ *d*) $\frac{\sqrt{3}}{4} + tan(3x) = \frac{3tan\frac{2}{3}}{4}$

e) $\text{sen}^2(2x) - \cos^2(2x) = \frac{1}{2}$ *f*) $\cos^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$

g) $1 + tan^2(3x+\pi) = \frac{1}{cos^2\frac{\pi}{8}}$ *h*) $\cos(2x) + \text{sen}\,x = 4\,\text{sen}^2\,x$

16. Determinar la longitud de los lados del triángulo de la figura, la medida de sus ángulos y su superficie si,

a) $b = 35m, A = 50°, B = 70°$ *b*) $a = 10cm, b = 7cm, C = 60°$
c) $a = 10m, b = 9, c = 7$ *d*) $a = 40m, b = 60, A = 42°$



17. Los lados de un triángulo miden 13m, 14m y 15m. Calcular el coseno y el seno del ángulo menor y la superficie del triángulo.

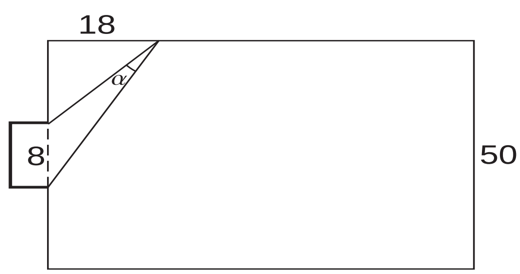
18. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde dos puntos A y B, de una misma orilla, distantes entre sí 24 metros, se observa un mismo punto C de la orilla opuesta. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ forman con la orilla desde la que se observa, unos ángulos de 34° y 58° respectivamente. Determinar la anchura del río.

19. Dos aviones salen de un mismo punto, en distintas direcciones, formando un ángulo de 25°. Supuesto que han marchado en línea recta, si uno ha recorrido 200 km. y el otro 320 km., ¿cuál es la distancia que los separa?

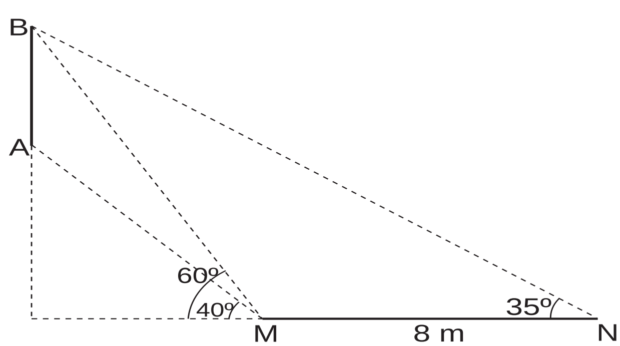
20. Dos personas, distantes entre sí 2 km. observan al mismo tiempo un avión. Si los ángulos de elevación observados son de $7\pi/18\,rad$ y $17\pi/36\,rad$. ¿Cuál es la altura del avión, supuesto que está en el mismo plano vertical que los dos observadores?

21. Una estatua de 2 m. de altura está colocada sobre un pedestal. Desde un punto situado a 1.5 m. del suelo, el pedestal se ve formando un ángulo de 20° con la horizontal. Desde este mismo punto, el punto más alto de la estatua se ve formando un ángulo de 45° con la horizontal. Calcular la altura del pedestal.

22. Un campo de fútbol mide 50 m. de ancho y la portería tiene 8 m. de ancho. Si un jugador está situado en la banda lateral, a 18 m. de la línea de fondo, ¿bajo qué ángulo ve la portería?



23. Calcular la longitud del segmento $\overline{AB}$ en la figura adjunta:



Capítulo 3

Nociones de Geometría Plana

Introducción

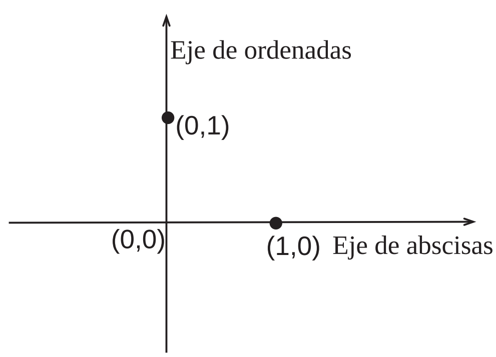


Figura 3.1: Sistema de referencia cartesiano.

Un ***Sistema de Referencia Cartesiano***, figura 3.1, está compuesto por tres elementos:

- Un punto arbitrario del plano que se denomina ***origen***, O, y se designa numéricamente por $(0, 0)$.
- Dos rectas perpendiculares que se cortan en el origen, O, y se denominan ***ejes de coordenadas***.
- Dos puntos, uno sobre cada eje, equidistantes ambos del origen, que se utilizan para indicar la ***unidad de medida*** sobre los ejes, además de señalar el ***sentido positivo*** sobre cada uno de ellos.
  - El primer punto, que se designa por $(1, 0)$, identifica el ***eje de abscisas***.
  - El segundo punto, que se designa por $(0, 1)$, identifica el ***eje de ordenadas***.

Las ***coordenadas*** de un punto en el plano son las longitudes, positivas o negativas, de los segmentos determinados por sus proyecciones sobre los ejes y el origen.

3.1. Distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia.

Se denomina ***distancia entre dos puntos*** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ del plano, ver figura 3.2, que denotamos por $d(A, B)$, a la longitud del segmento de recta que tiene por extremos A y B. Esto es:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

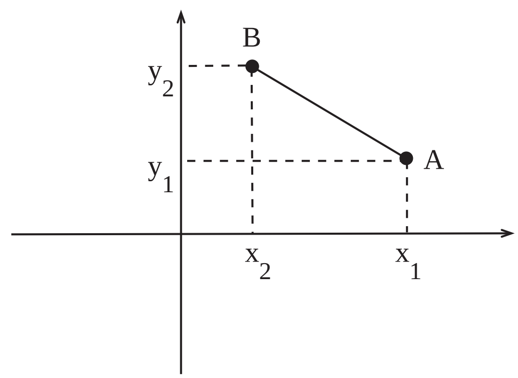


Figura 3.2: Distancia entre dos puntos.

Ejemplo 3.1.1. La distancia entre los puntos $A = (1, 5)$ y $B = (-3, 1)$ respecto de un mismo sistema de referencia, es igual a:

$$d(A, B) = \sqrt{((-3) - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Una ***circunferencia*** es el conjunto de puntos del plano que están a una distancia fija, llamada ***radio***, de un determinado punto, llamado ***centro*** de la circunferencia.

Una circunferencia está determinada por su centro, que será un punto de coordenadas (x_0, y_0), y su radio r. Para que un punto (x, y), pertenezca a la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r, se debe cumplir la siguiente condición:

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = r$$

y según la fórmula para la distancia entre dos puntos esta expresión queda como

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

que, elevada al cuadrado, da lugar a la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ejemplo 3.1.2. La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro el punto $(3, 4)$ es $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Si en la ecuación de la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ desarrollamos los cuadrados resulta:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

es decir, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ y $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

Pero no todas las ecuaciones de la forma anterior representan una circunferencia, es necesario que r^2 sea positivo; es decir, los números a, b, c tienen que ser tales que

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = (-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0.$$

En resumen, si a, b y c son números reales tales que $a^2 + b^2 - 4c > 0$, entonces la ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

representa una circunferencia con:

- Centro: $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$,
- Radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

Ejemplo 3.1.3. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar su centro y su radio.

- Centro: $C = (-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) = (1, -2)$,
- Radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)} = 3$

3.2. Ecuación de la recta.

Una ***recta*** es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación del tipo

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.1}$$

donde A, B y C son números reales. A esta ecuación se la conoce como *ecuación implícita* de la recta. Según la definición, un punto pertenece a una recta si, al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta, ésta se satisface.

Ejemplo 3.2.1. El punto $(1, 3)$ pertenece a la recta $4x - y - 1 = 0$ por ser $4 \cdot 1 - 3 - 1 = 0$ y el punto $(2, 3)$ no pertenece a la recta por ser $4 \cdot 2 - 3 - 1 \neq 0$.

Si $B = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $x = -\frac{C}{A}$, que representa la recta paralela al eje de ordenadas, situada a distancia $-\frac{C}{A}$ del origen.

Si $A = 0$, la ecuación 3.1 se reduce a $y = -\frac{C}{B}$, que es la recta paralela al eje de abscisas situada a distancia $-\frac{C}{B}$ del origen.

Ejemplo 3.2.2.

- La ecuación $2x - 5 = 0$ es una recta paralela al eje de ordenadas formada por los puntos de abscisa constante $x = \frac{5}{2}$.
- La ecuación $3y + 1 = 0$ es una horizontal formada por los puntos de ordenada fija $y = -\frac{1}{3}$.

Cuando $B \neq 0$ la ecuación 3.1 se puede expresar como $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Si hacemos $m = -\frac{A}{B}$ y $n = -\frac{C}{B}$ obtenemos la *ecuación explícita* de la recta:

$$y = mx + n$$

La constante m se denomina ***pendiente*** de la recta e indica su inclinación, y la constante n representa la ***ordenada en el origen***.

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y que tiene como pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta expresión se conoce como *ecuación punto-pendiente* de la recta.

Si ahora conocemos dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y queremos calcular la recta que pasa por ellos, debemos buscar una ecuación de la forma $y = mx + n$ que se verifique para los valores (x_1, y_1) y también para (x_2, y_2); luego, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Una vez resuelto, obtenemos la *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*:

- Si $x_1 \neq x_2$, la ecuación es $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$.
- Si $x_1 = x_2$, la ecuación es $x = x_1$.

Podemos observar que dados dos puntos existe una única recta que pasa por ellos.

Ejemplo 3.2.3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, -1)$ es $y = \frac{-1-2}{3-1}(x - 1) + 2$ o bien, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

3.3. Pendiente de una recta. Rectas paralelas

La ***pendiente*** de la recta indica su inclinación. Expresa lo que crece , o decrece, la ordenada y de los puntos de la recta por cada unidad que aumente la abscisa x. Observamos que la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las x. Luego, la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) (ver figura 3.3), es:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

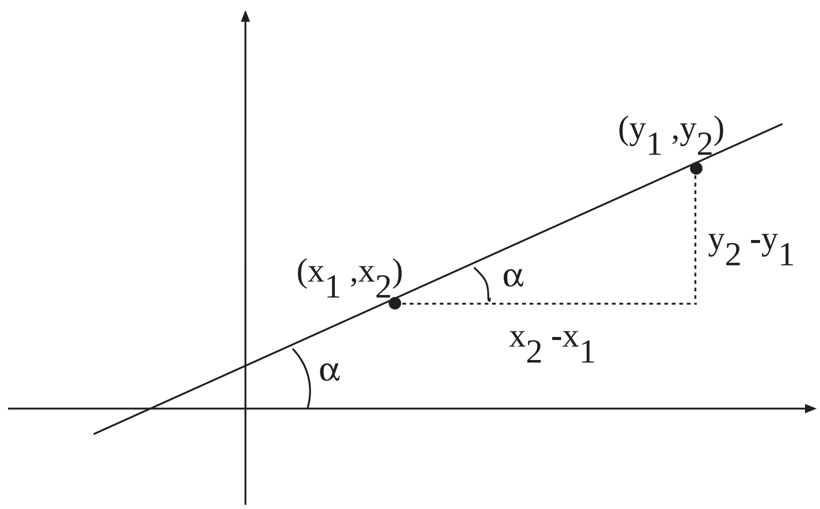


Figura 3.3: La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Ejemplo 3.3.1. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(5, 4)$ es $m = \tan\alpha = \frac{4-1}{5-(-2)}$.

Puesto que la pendiente de una recta marca su inclinación con respecto a los ejes de coordenadas, dos rectas son ***paralelas*** si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 3.3.2. Las rectas $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 6$ son paralelas porque tienen la misma pendiente $m = 2$.

3.4. Rectas perpendiculares. Cálculo de la recta perpendicular por un punto a una recta dada.

Dos rectas $r \equiv y = mx + n$ e $r' \equiv y = m'x + n'$ son ***perpendiculares*** si $m \cdot m' = -1$ o bien, $m' = -\frac{1}{m}$. Toda recta perpendicular a r, es paralela a r'.

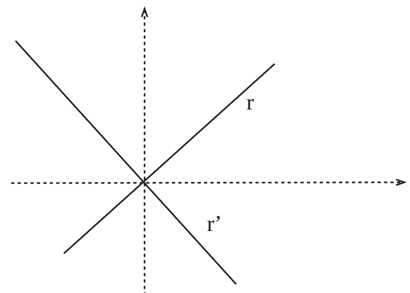


Figura 3.4: Las rectas $r \equiv y = mx + n$ y $r' \equiv y = (-\frac{1}{m})x + n'$ son perpendiculares.

La ecuación de la recta perpendicular a $y = ax + b$ que pasa por el punto (x_0, y_0) es

$$y = (-\frac{1}{a})(x - x_0) + y_0.$$

Ejemplo 3.4.1. La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x+1$ que pasa por el punto $(2, -1)$ es $y = -\frac{1}{2}(x - 2) - 1$.

3.5. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazado desde el punto (ver figura 3.5).

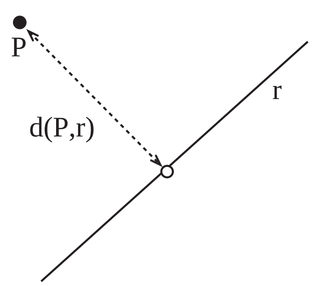


Figura 3.5: Distancia de un punto a una recta.

Esto es, dada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ y un punto $P = (x_1, y_1)$ no contenido en r. La distancia entre el punto y la recta viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 3.5.1. La distancia del punto $p = (-5, 8)$ a la recta $r \equiv 2x - 6y + 7 = 0$ es:

$$d(p, r) = \frac{|2(-5) - 6 \cdot 8 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{51}{\sqrt{40}}.$$

3.6. Área de un triángulo

El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura (donde la altura es la longitud de un segmento perpendicular que parte de la base hasta llegar al vértice opuesto) y dividiéndolo por dos.

Ejemplo 3.6.1. *Los puntos de coordenadas $A = (3, 8)$, $B = (-11, 3)$ y $C = (-8, -2)$ son los vértices de un triángulo. Hallar su área:*

Tomamos como base del triángulo el segmento $\overline{BC}$, su longitud es:

$$d(B, C) = \sqrt{(-8 + 11)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{34}.$$

La altura del triángulo será la distancia de A a la recta que pasa por B y por C, BC:

Ecuación de BC: $m = \frac{-2-3}{-8+11} = \frac{-5}{3} \rightarrow y = 3 - \frac{5}{3}(x + 11) \rightarrow 5x + 3y + 46 = 0$

Altura: $d(A, BC) = \frac{|5 \cdot 3+3 \cdot 8+46|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} = \frac{85}{2}$$

3.7. Punto medio de un segmento. Mediatriz

Las coordenadas del ***punto medio***, M, de un segmento de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) son:

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Ejemplo 3.7.1. El punto medio del segmento de extremos $(-5, 2)$, $(7, -4)$ es el punto $M = (1, -1)$.

Si A' es el ***simétrico*** de A respecto de P, entonces P es el punto medio del segmento AA'. Así, si $A = (a_1, a_2)$ y $P = (p_1, p_2)$, las coordenadas de $A' = (x, y)$ se pueden obtener resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_1+x}{2} \\ p_2 = \frac{a_2+y}{2} \end{cases}$$

Ejemplo 3.7.2. *Hallar el simétrico A', del punto $A = (7, 4)$ respecto de $P = (3, -11)$:*

Llamamos (x, y) a las coordenadas de A'. Se cumple que:

$$\begin{cases} 3 = \frac{7+x}{2} & \rightarrow & \text{x=-1} \\ -11 = \frac{4+y}{2} & \rightarrow & \text{y=-26} \end{cases}$$

Luego, $A' = (-1, -26)$.

Se llama ***lugar geométrico*** al conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. La ***mediatriz*** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos, que equidistan de sus extremos:

$$d((x,y),A) = d((x,y),B)$$

Ejemplo 3.7.3. *Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A = (-3,4)$, $B = (1,0)$:*

El punto (x,y) pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si cumple la condición $d((x,y),(-3,4)) = d((x,y),(1,0))$:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y desarrollamos los cuadrados indicados:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \ \rightarrow \ x - y + 3 = 0 \ \rightarrow \ y = x + 3$$

La recta obtenida, $y = x + 3$, tiene las siguientes características:

- Pasa por $(-1,2)$, que es el punto medio del segmento.
- Su pendiente, 1, y la pendiente del segmento, -1, cumplen que $1 \cdot (-1) = -1$. Son perpendiculares.

3.8. Ecuación de la elipse, hipérbola y parábola

Definición. *Dados dos puntos, F y F', llamados focos, y una distancia k, llamada constante de la elipse ($k > d(F,F')$), se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya suma de distancias a F y a F' es igual a k:*

$$d((x,y),F) + d((x,y),F') = k$$

Definición. *Dados dos puntos, F y F', llamados focos, y una distancia k, llamada constante de la hipérbola ($k < d(F,F')$), se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya diferencia de distancias a F y a F' es igual a k:*

$$|d((x,y),F) - d((x,y),F')| = k$$

Definición. *Dados un punto F, llamado foco, y una recta, d, llamada directriz, se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) que equidistan de F y de d:*

$$d((x,y),F) = d((x,y),d)$$

Ejemplo 3.8.1. Dados los puntos $F = (-2,5)$, $F' = (7,-3)$ y la recta $r \equiv x - y - 1 = 0$, obtener las ecuaciones de:

1. La elipse de focos F y $F^{'}$ y cuya constante es 17.
   $d((x,y),F)+d((x,y),F^{'})=17 \ \rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}=17$

2. La hipérbola de focos F y $F^{'}$ y cuya constante es 6.
   $|d((x,y),F)-d((x,y),F^{'})|=6 \ \rightarrow\ |\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}|=6$

3. La parábola de foco F y directriz r.
   $d((x,y),F)=d((x,y),r) \ \rightarrow\ \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{1+1}}$

3.8.1. Estudio de la elipse

Elementos característicos de la elipse: Los elementos característicos de una elipse de focos F y $F^{'}$, figura 3.6, son:

O centro de la elipse

$a=\overline{OA}=\overline{OA'}$ semieje mayor

$b=\overline{OB}=\overline{OB'}$ semieje menor

$c=\overline{OF}=\overline{OF'}$ semidistancia focal

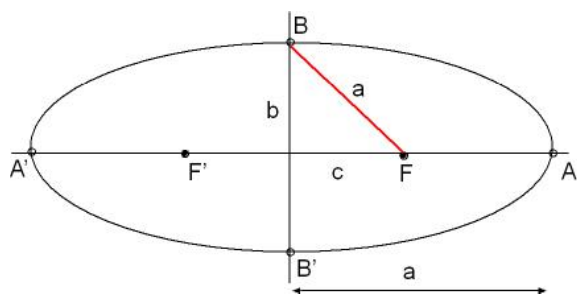


Figura 3.6: La elipse.

La constante, k, de la elipse es $2a$, pues $k=\overline{AF}+\overline{AF'}=2a$. Como B es un punto de la elipse se cumple que $\overline{BF}+\overline{BF'}=2a \Rightarrow \overline{BF}=\overline{BF'}=a$. Además, el triángulo rectángulo BOF cumple que $a^2=b^2+c^2$. A los puntos A, A', B y B' les llamamos ***vértices*** de la elipse.[1]

Se llama ***excentricidad de una elipse*** al cociente entre la distancia focal y el eje mayor, $e=\frac{c}{a}$, que es un número mayor que cero y menor que 1.

Las tres elipses de la figura 3.7 tienen el mismo eje mayor, $2a$. Se observa que cuanto más distan los focos, mayor es su excentricidad.

[1]Esta notación no está universalmente aceptada. Algunos autores llaman vértices sólo a los puntos extremos del eje mayor.

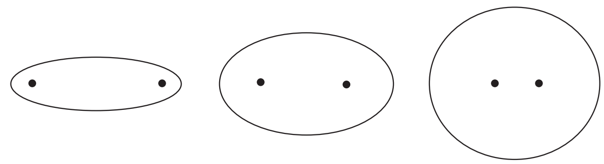


Figura 3.7: Las tres elipses tienen el mismo eje mayor.

Ecuación reducida de la elipse: La ecuación reducida de la elipse de focos $F^{'} = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ejemplo 3.8.2. Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos $F^{'} = (-4, 0)$ y $F = (4, 0)$ y constante $k = 10$.

Semieje mayor: $k = 10 \to 2a = 10 \to a = 5$

Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 8$ →2c=8→ $c = 4$

Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 \to b = 3$

Excentricidad: $c/a = 4/5 = 0.8$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ◀

Ecuación de la elipse con focos en el eje Y: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Ecuación de la elipse con centro distinto del (0,0): La ecuación de la elipse de semiejes a y b, con centro en (α, β) y ejes paralelos a los ejes coordenados es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

3.8.2. Estudio de la hipérbola

Elementos característicos de la hipérbola: La hipérbola de focos F y $F^{'}$ como en la figura 3.8, sus elementos característicos son:

O centro de la hipérbola

$c = \overline{OF} = \overline{OF'}$ semidistancia focal

$a = \overline{OA} = \overline{OA'}$ semieje

r y $r^{'}$ asíntotas.

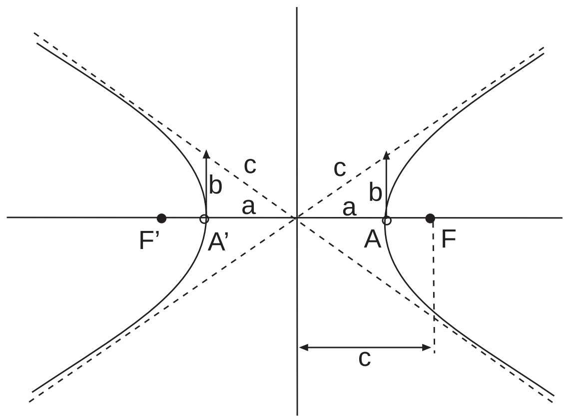


Figura 3.8: La hipérbola.

La constante de la hipérbola es $2a$, pues $k = \overline{AF'} - \overline{AF} = \overline{AF'} - \overline{A'F'} = \overline{AA'} = 2a$. Se cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$, (ahora es $c > a$). Y al igual que en la elipse, la relación entre c y a se llama *excentricidad.* A los puntos A y A' les llamamos ***vértices*** de la hipérbola.

Ecuación reducida de la hipérbola: La ecuación reducida de la hipérbola de focos $F' = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuación de la hipérbola con focos en el eje Y: En general, la ecuación $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ corresponde a una hipérbola cuyos focos son $F = (0, c)$ y $F' = (0, -c)$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ecuación de la hipérbola con centro distinto del (0,0): La ecuación de la hipérbola de semiejes a y b, con centro en (α, β) y ejes paralelos a los ejes coordenados es una de las siguientes:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

3.8.3. Estudio de la parábola

Elementos característicos de la parábola: Los elementos característicos de la parábola son, figura 3.9:

F foco

d directriz

V vértice

p distancia del foco a la directriz.

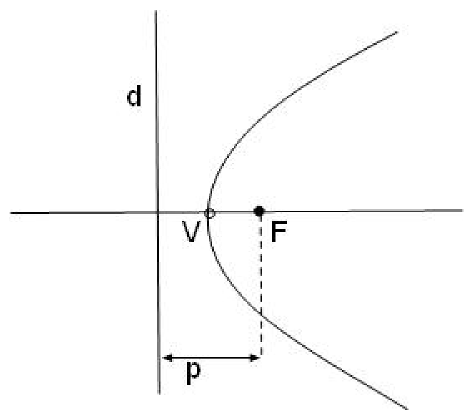


Figura 3.9: La parábola.

Ecuación reducida de la parábola: La ecuación reducida de la parábola de foco $F = (\frac{p}{2}, 0)$ y directriz $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ es

$$y^2 = 2px.$$

Ejercicios y problemas

1. Hallar el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

$x^2 + y^2 = 8$	$(x-3)^2 + (y+0'3)^2 = 9$	$4x^2 - 4x + 4y^2 - 3 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 100$	$x^2 + y^2 - 8x + 10y = 4$	$4x^2 + 4y^2 + 28y + 13 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + 12y = 48$	$9x^2 - 6x + 9y^2 + 6y = -1$	$x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 - 2\sqrt{3}y = 0$

2. Hallar, en cada caso, el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia C que cumple:

a) El segmento que une los puntos $P_1(-1,-3)$ y $P_2(3,1)$ es un diámetro de C.

b) Pasa por los puntos $P_1(1-2)$, $P_2(-3,4)$ y $P_3(4,2)$.

c) Pasa por los tres vértices de un triángulo equilátero del cual se sabe que está en el primer cuadrante, uno de sus lados es paralelo al eje OX, su altura vale $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y uno de sus vértices es el punto $P(1,1)$ (Hallar todas las soluciones).

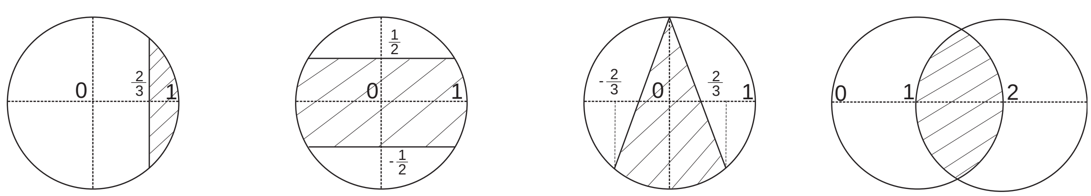
d) Pasa por los seis vértices de un hexágono regular uno de cuyos lados es el segmento que une los puntos $P_1(1,1)$ y $P_2(3,1)$ (Hay dos soluciones).

e) Es tangente a la circunferencia $C' \equiv x^2 + 4x + y^2 + 6y = -9$, la recta que une los centros de C y C' es paralela al eje OY y el radio de C es dos tercios del radio de C_1 (Hay cuatro soluciones).

f) Tiene el mismo centro que la circunferencia C' que pasa por los puntos $P_1(-2,0)$, $P_2(0,1)$ y $P_3(-1,-2)$ y el área que encierra es la misma que el área de la corona circular que delimita en el interior de C'.

3. La circunferencias C_1 y C_2 tienen radios 1 y 2 respectivamente y sus centros están en los puntos $P(1,1)$ y $Q(3,2)$. Hallar la distancia entre sus puntos de corte.

4. Hallar, en cada caso, el área de la zona rayada:



5. Hallar, en cada caso, la pendiente de la recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P_1(-1,2)$ y $P_2(2,-1)$.

b) Pasa por los puntos $P_1(0,-2)$ y $P_2(87'3,-2)$.

c) Pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(-2,87'3)$.

d) Su ordenada en el origen vale 2 y corta al eje OX en el punto $P(\frac{2}{3},0)$.

e) Pasa por los puntos $P(1,a)$ y $Q(a+1,b)$.

6. ¿Están alineados los puntos $P(0,3)$, $Q(1,1)$ y $R(2,-1)$? Hallar a para que los puntos $P_1(1,5)$, $Q(-2,-1)$ y $R(a^2-1, 3(a+1))$ estén alineados.

7. Determinar si la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela, perpendicular o ninguna de las dos cosas a la recta que pasa por los puntos R y S en los casos siguientes:

a) $P(4,2)$, $Q(8,3)$, $R(-2,8)$ y $S(1,-4)$.

b) $P(0,-5)$, $Q(15,0)$, $R(1,2)$ y $S(0,5)$.

c) $P(-7,8)$, $Q(8,-7)$, $R(-8,10)$ y $S(6,-4)$.

d) $P(8,-2)$, $Q(2,8)$, $R(-2,-8)$ y $S(-8,-2)$.

8. Hallar k para que las rectas que pasan, respectivamente, por P y Q y por R y S sean: 1) Paralelas y 2) Perpendiculares.

a) $P(2,1)$, $Q(6,3)$, $R(4,k)$ y $S(3,1)$.

b) $P(1,k)$, $Q(2,3)$, $R(1,7)$ y $S(3,6)$.

c) $P(9,4)$, $Q(k,10)$, $R(11,-2)$ y $S(-2,4)$.

d) $P(1,2)$, $Q(4,0)$, $R(k,2)$ y $S(1,-3)$.

9. Dibujar y hallar, en cada caso, la ecuación de la recta r sabiendo que r:

a) Pasa por los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-2,3)$. Idem con $P(2'5,-3'8)$ y $Q(3'8,-2'5)$.

b) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $2x+y+1=0$.

c) Pasa por el punto $P(-2,1)$ y es paralela a la recta $x+2y+1=0$.

d) Pasa por el punto $P(-1'5, \frac{1}{3})$ y es perpendicular a la recta $3x-2y=4$.

e) Pasa por el punto $P(2,3)$ y es una recta vertical.

f) Pasa por el punto $P(3,2)$ y es una recta horizontal.

g) Pasa por el punto $A(-1'2, 2'3)$ y es perpendicular al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5}, \frac{9}{7})$.

h) Es la mediatriz del segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(-\frac{3}{5}, \frac{9}{7})$.

i) Pasa por el punto medio del segmento que une los puntos de corte de la recta $2x-y+1=0$ con la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ y es perpendicular a dicho segmento.

j) Pasa por el punto $P(1,-1)$ y es paralela a la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

k) Es perpendicular a la recta $2x+3y+4=0$ y su ordenada en el origen es 5.

l) Es paralela al segmento que une los puntos $P(2,-1)$ y $Q(3,0)$ y pasa por $R(4,0)$.

m) Es la recta simétrica respecto del eje OY de la recta $2x+3y+4=0$.

n) Es la recta simétrica respecto del eje OX de la recta mediatriz del segmento que une los puntos $A(2,1)$ y $B(1,3)$.

10. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(-1'5, -2'5)$ y su radio vale $\sqrt{2}\,u$. La recta $x = -0'5$ corta a dicha circunferencia en los puntos P_1 y P_2 y por dichos puntos trazamos sendas tangentes a la circunferencia. Hallar el punto en el que se cortan dichas tangentes.

11. Hallar la distancia del punto $P(1, 1)$ a la recta $x + y - 1 = 0$.

12. Hallar la distancia de la recta $3'2x - 5'3y = 0'25$ al origen de coordenadas.

13. Hallar la distancia entre las rectas $2x + 3y = 4$ y $2x + 3y = 5$.

14. Usamos la recta $r \equiv y = -3x + 2$ como espejo. Hallar:

a) La imagen que refleja el punto $P(4, 1)$.

b) La ecuación de la imagen reflejada por la circunferencia $x^2 + 6x + y^2 + 2\sqrt{2}y = -9$.

c) La ecuación de la imagen que refleja la recta $6x + 2y = -7$.

d) La recta que tiene la misma ordenada en el origen que r y es igual a su imagen reflejada.

e) La circunferencia que es igual a su reflejada, tiene radio 1 y es tangente al eje OX.

15. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P(1, 1)$, $Q(3, 0)$ y $R(2, 3)$.

16. Hallar el área del triángulo delimitado por las rectas $r_1 \equiv y = \frac{1}{3}x$, $r_2 \equiv x = 1$ y $r_3 \equiv y = -\frac{1}{3}x + 5$

17. Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en los puntos $P(1, 3)$ y $Q(3, 1)$. Determinar el vértice que falta (hay dos soluciones) y calcular el área de dicho triángulo.

18. Dado un triángulo cuyos vértices están en los puntos A, B y C (simbolizado por $\triangle ABC$), por cada vértice trazamos una paralela al lado opuesto de dicho vértice. Los puntos de corte de dichas rectas son los vértices de un nuevo triángulo llamado triángulo órtico de $\triangle ABC$. Hallar los vértices del triángulo órtico del triángulo $\triangle ABC$ en los casos siguientes:

a) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$.

b) $A(-1, -2)$, $B(3, -1)$ y $C(1, 3)$.

c) $A(-1, -1)$, $B(2, 1)$ y $C(3, -3)$.

19. Dados los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 1)$ y $C(7, 5)$, hallar:

a) La ecuación de las tres bisectrices del triángulo $\triangle ABC$.
Indicación: $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ y $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

b) La ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

c) La ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

20. La diagonal mayor de un rombo está sobre la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$ y mide $3\,u$, uno de los vértices de dicha diagonal está en el punto $V_1(0,1)$ y la diagonal menor mide la mitad de la diagonal mayor. Hallar el área de dicho rombo.

21. Los vértices de un hexágono regular están, leídos siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, en los puntos $A(0,1)$, B, C, D, E y F y el segmento $\overline{AD}$ mide $\sqrt{10}\,u$ y está sobre la recta $2x - 6y = -6$. Hallar los cinco vértices restantes del hexágono.

22. Probar que la figura formada al conectar los puntos medios consecutivos de un cuadrilátero es un paralelogramo.

23. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el segmento que une los puntos $A(0,0)$ y $B(3,0)$. Se sabe que la longitud de uno de los catetos es $1\ u$. Hallar el vértice que falta (hay cuatro soluciones).

24. La parábola $\mathbb{P}$ tiene su foco en el punto F, su vértice en el punto V y su directriz es la recta r. Hallar, en cada caso, la ecuación de $\mathbb{P}$.

a) $F(0,1)$ $\quad r \equiv y = -1$	*b*) $F(1,0)$ $\quad r \equiv x = 0$	*c*) $V(0,0)$ $\quad F(0,-1)$
d) $F(-2,0)$ $\quad r \equiv x = -3$	*e*) $F(0,1)$ $\quad r \equiv y = 2$	*f*) $V(0,0)$ $\quad F(1,0)$
g) $V(0,-1)$ $\quad F(0,0)$	*h*) $V(-1,0)$ $\quad F(-2,0)$	*i*) $V(0,1)$ $\quad F(0,0)$
j) $V(0,-1)$ $\quad r \equiv y = -2$	*k*) $V(-1,0)$ $\quad r \equiv x = 1$	*l*) $V(0,1)$ $\quad r \equiv y = 3$

25. Dibujar cada una de las siguientes parábolas después de hallar su vértice, foco, directriz y puntos de corte con los ejes.

a) $y = x^2$	*b*) $y = 2x^2$	*c*) $y = -x^2$
d) $y = -\frac{1}{2}x^2$	*e*) $y^2 + 10x = 0$	*f*) $y = 2x^2 - 2x - 4$
g) $y = 3x^2 - 2x + 1$	*h*) $y = -7x^2 + 1$	*i*) $y = -0'2x^2 - 3x$
j) $y = 0'1x^2 + 2x + 3$	*k*) $y^2 + 2y + x = 1$	*l*) $x = \sqrt{3}y^2 + \sqrt{2}y$
m) $1 = -2y^2 - 3y - x$	*n*) $(y-1)^2 + (x-2)^2 = x^2$	*o*) $9x^2 - 9y + 3x = 1$

26. Una parábola corta al eje OX en los puntos $P_1(-1,0)$ y $P_2(2,0)$. Su vértice está en el punto $V(0'5, 2)$. Hallar el foco, la directriz y la ecuación de la parábola.

27. Una parábola corta al eje OX sólo en el punto $P(2,0)$ y al eje OY sólo en el punto $Q(0,2)$. Hallar su foco, su directriz y dibujar dicha parábola (hay dos soluciones).

28. El vértice de una parábola está situado en el punto $V(1,-1)$ y pasa por los puntos $P_1(-1,3)$ y $P_2(3,3)$. Encontrar la ecuación, foco y directriz de dicha parábola.

29. El foco de una parábola está situado en el punto $F(-2,3)$ y dista del vértice $3\,u$. Encontrar la ecuación, vértice y directriz de dicha parábola (hay cuatro soluciones).

30. Una parábola tiene su foco en el origen de coordenadas y la distancia del mismo a su vértice es igual a la distancia entre el foco y los puntos de corte de la parábola con el eje OX. Hallar la ecuación de dicha parábola (hay muchas soluciones).

31. Dada la parábola $y = x^2 - 2x$, encontrar otra parábola tal que sus vértices respectivos y los dos puntos en los que se cortan dichas parábolas sean los vértices de un cuadrado.

32. Hallar los vértices y los focos las siguientes elipses (y dibujarlas):

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	*b*) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$	*c*) $x^2 + 2y^2 + 4y + 7 = 6x$
d) $25x^2 + 9y^2 = 225$	*e*) $4x^2 + 25y = 25$	*f*) $2x^2 + 5y^2 - 3x + 10y = 0$
g) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$	*h*) $6x^2 + 4y^2 = 2$	*i*) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 2x = 3y$

33. Hallar, en cada caso, la constante, todos los vértices[2], la excentricidad y la ecuación de la elipse (y dibujarla) que cumple:

a) Tiene sus focos situados en los puntos $F_1(-2,0)$ y $F_2(2,0)$ y dos de sus vértices son los puntos $V_1(-5,0)$ y $V_1(5,0)$.

b) Focos: $F_1(0,5)$ y $F_2(0,-5)$ Vértices: $V_1(0,13)$ y $V_2(0,-13)$.

c) Focos: $F_1(3,1)$ y $F_(3,-1)$ Vértices: $V_1(3,3)$ y $V_2(3,-3)$.

d) Focos: $F_1(1,2)$ y $F_(-1,2)$ Longitud del eje mayor 6.

e) Centro: $C(2,2)$ Foco: $F_1(0,2)$ Vértice: $V_1(5,2)$

f) Focos: $F_1(-3,1)$ y $F_2(1,1)$ Vértice: $V_1(-1,3)$

34. Hallar la constante y la ecuación de las hipérbolas que cumplen:

a) Focos: $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$ Vértices: $V_1(-2,0)$ y $V_2(2,0)$.

b) Focos: $F_1(0,13)$ y $F_2(0,-13)$ Vértices: $V_1(0,5)$ y $V_2(0,-5)$.

c) Focos: $F_1(3,1)$ y $F_(3,-1)$ Vértices: $V_1(3,3)$ y $V_2(3,-3)$

d) Vértices: $V_1(3,0)$ y $V_2(-3,3)$ Asíntotas: $y = 2x$ $y = -2x$.

e) Focos: $F_1(2,2)$ y $F_(6,2)$ Asíntotas: $y = x - 2$ $y = 6 - x$

35. Hallar sobre el eje OX cuatro puntos $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(-b,0)$ y $B_2(b,0)$ con $a > b > 0$ tales que la elipse cuyos focos son A_1 y A_2 y cuyos vértices son B_1 y B_2 corta a la hipérbola cuyos focos son B_1 y B_2 y cuyos vértices son A_1 y A_2 en cuatro puntos que resultan ser los vértices de un cuadrado.

[2]Recuérdese que nosotros llamamos vértices a los puntos extremos del ambos ejes, el mayor y el menor. Algunos autores llaman vértices sólo a los puntos extremos del eje mayor

Capítulo 4

Las funciones elementales

4.1. Conceptos básicos sobre funciones

Sea D un subconjunto de números reales. Una **función (real de variable real)** es una "ley" que a cada número real x del subconjunto D le asocia otro número real único (denominado **imagen** de x). Al conjunto D se le llama **dominio** de la función.

Ejemplos de funciones son los siguientes:

1. La ley que a cada número no negativo le asocia su raíz cuadrada positiva.

2. La ley que a cada número del intervalo $[-1, 5]$ le asocia su cuadrado aumentado en dos unidades.

3. La ley que a cada número distinto de 0 le asigna su inverso.

En el primer ejemplo, el dominio de dicha función sería $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (es decir, los números no negativos); en el segundo caso, el dominio es el conjunto $[-1, 5]$ tal y como nos indican; por último, el dominio de la tercera función es $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, puesto que podemos calcular el inverso de cualquier número real excepto del 0.

Las funciones se suelen denotar con las letras $f, g, h, \ldots$. Para determinar una función, hay que indicar tanto su dominio como la expresión algebraica que permite obtener la imagen de cada valor del dominio. Esto se suele abreviar en Matemáticas de la siguiente forma:

$$f\colon \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

es decir, estamos definiendo una función que denominamos f, cuyo dominio es D y que a cada número x del dominio D le asocia la imagen $f(x)$. Volviendo a los ejemplos de arriba, tendríamos que tales funciones se abrevian como sigue:

1. $$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & +\sqrt{x} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} g\colon & [-1,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

OBSERVACIONES:

- En algunas ocasiones, para precisar una función f tan sólo se indica la ley algebraica $f(x)$. En este caso, tenemos que entender que el dominio de dicha función es el máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ posible, es decir, el conjunto de los números x para los cuales tiene sentido calcular $f(x)$. Por ejemplo, si decimos "sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$", debemos entender que el dominio de tal función está constituido por todos los números reales excepto el 2 y -2, pues estos dos valores anulan el denominador. Por otra parte, el dominio de la función $g(x) = x^2+1$ es todo $\mathbb{R}$, pues es posible elevar al cuadrado cualquier $x \in \mathbb{R}$ y sumarle 1.

- El dominio de una función depende también de la naturaleza de las magnitudes que pretendemos describir. Por ejemplo, la función $f(x) = \pi x^2$ designa el área de un círculo de radio x; matemáticamente, tal función tiene por dominio todo $\mathbb{R}$; en el marco de la Geometría, el dominio de dicha función sería $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, pues no tiene sentido hablar de círculos con radio negativo.

- En los ejemplos del punto anterior, x recibe el nombre de **variable independiente**, pues varía con libertad en el dominio D. Sin embargo, la variable independiente puede venir representada por otra letra. Así, las expresiones siguientes representan todas a la misma función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \qquad f(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}} \qquad f(z) = \frac{z}{\sqrt{z+1}}$$

◀

Las siguientes definiciones están referidas a una función f cuyo dominio es D.

Se llama **imagen** de f, y se abrevia Im (f), al conjunto numérico formado por todas las imágenes $f(x)$ cuando x recorre el dominio D; es decir,

$$\mathrm{Im}\ (f) = \{f(x) : x \in D\}.$$

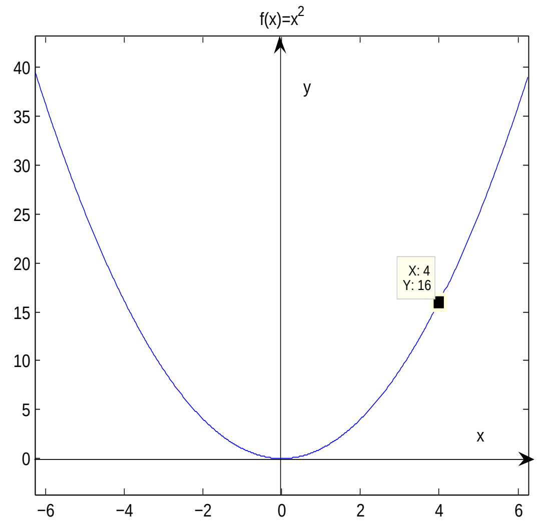
Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (puesto que podemos elevar al cuadrado cualquier número real). En este caso

$$\mathrm{Im}\ (f) = \{f(x)\colon x \in \mathbb{R}\} = \{x^2\colon x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty).$$

Se llama **gráfica** de f a la curva resultante al representar en unos ejes cartesianos el conjunto siguiente:

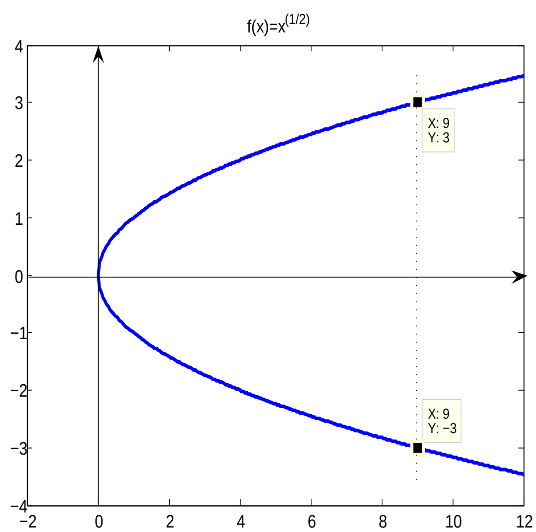
$$\{(x, f(x))\colon x \in D\}$$

es decir, el conjunto de todos pares ordenados cuya primera coordenada es un punto x del dominio y cuya segunda coordenada es su imagen $f(x)$. La ecuación de la gráfica de una función viene dada por $y = f(x)$.



Esta es la gráfica de la función $f(x) = x^2$, es decir, la curva que resulta al representar todos los puntos de la forma (x, x^2) cuando x recorre $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $f(4) = 4^2 = 16$, luego uno de los puntos de la curva anterior es la representación del par $(4, 16)$. La ecuación de dicha curva (denominada parábola) es $y = x^2$.

Debemos hacer notar que, si bien la gráfica de cualquier función es una curva sobre el plano $\mathbb{R}^2$, no todas las curvas del plano son la gráfica de alguna función. Por ejemplo, la siguiente curva



no es la gráfica de ninguna función pues, por ejemplo, el valor $x = 9$ tendría dos imágenes, $y_1 = 3$ e $y_2 = -3$ (como se ha dicho en la definición de función, a cada punto del dominio se le asocia una única imagen). En general, la gráfica de una función tiene la propiedad

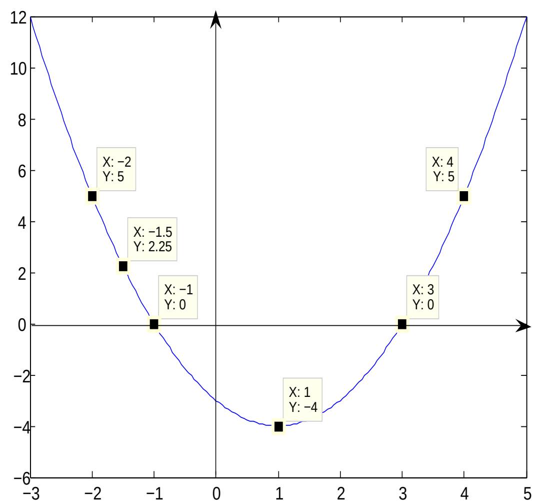
de que cualquier recta vertical corta a dicha gráfica en, a lo sumo, un punto.

4.2. Algunas características sobre funciones

Sea f una función con dominio D.

Se dice que f es **creciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in I$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I, crece $f(x)$ (la gráfica de f "sube" a medida que "nos movemos hacia la derecha" en el eje OX).

Se dice que f es **decreciente** en el intervalo $I \subset D$ si, cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in I$ verificando $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$; es decir, si a medida que crece x en el intervalo I, decrece $f(x)$ (la gráfica de f "baja" a medida que "nos movemos hacia la derecha" en el eje OX).



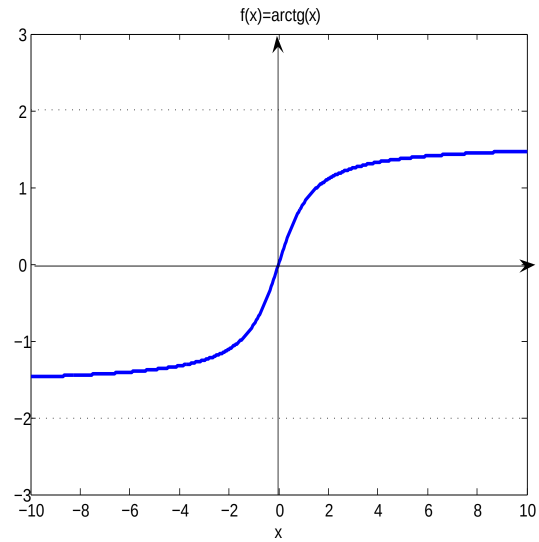
La función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.

Se dice que f está **acotada superiormente** en el intervalo $I \subset D$ si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ cualquiera que sea $x \in I$; es decir, la imagen de cualquier x del intervalo I es menor que cierta constante M (la gráfica de f queda por debajo de la recta horizontal $y = M$). La constante M recibe el nombre de **cota superior** de f en I.

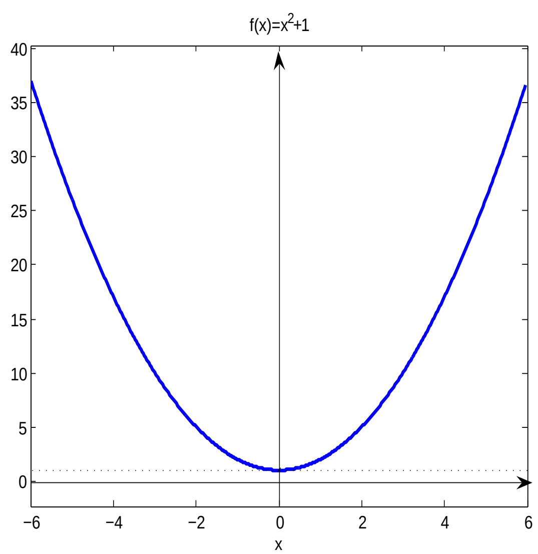
Se dice que f está **acotada inferiormente** en el intervalo $I \subset D$ si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ cualquiera que sea $x \in I$; es decir, la imagen de cualquier x del intervalo I es mayor que cierta constante m (la gráfica de f queda por encima de la recta horizontal $y = m$). La constante m recibe el nombre de **cota inferior** de f en I.

Se dice que f está **acotada** en el intervalo $I \subset D$ si está acotada superior e inferiormente en I. En virtud de las definiciones anteriores, esto puede resumirse diciendo que existe un número $K > 0$ tal que $-K \leq f(x) \leq K$ cualquiera que sea $x \in I$ (la gráfica de

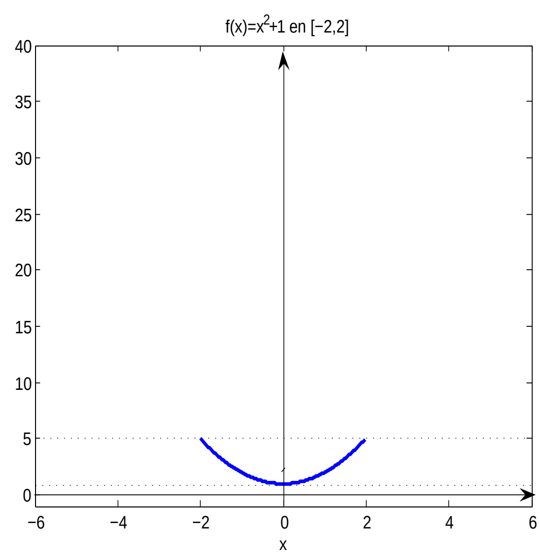
f está entre las rectas horizontales $y = -K$ e $y = K$). La constante K recibe el nombre de **cota** de f en I.



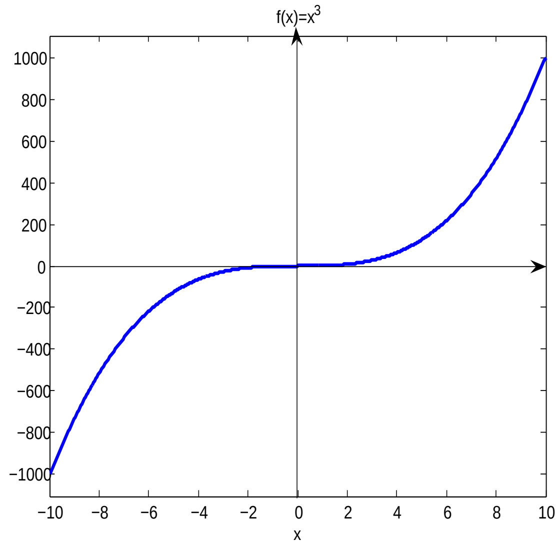
Esta función está acotada superior e inferiormente en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, $M = 2$ es cota superior de f en $\mathbb{R}$ y $m = -2$ es cota inferior de f en $\mathbb{R}$). Es, pues, una función acotada en $\mathbb{R}$.



Esta función está acotada inferiormente en $\mathbb{R}$ ($m = 1$ sirve como cota inferior de f en $\mathbb{R}$) pero no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$.



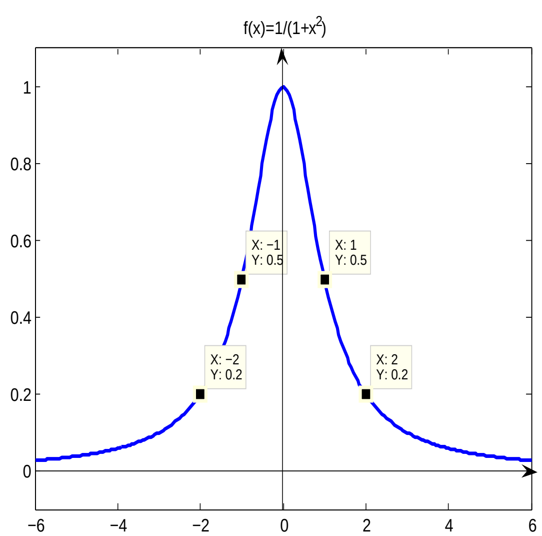
Sin embargo, si nos restringimos, por ejemplo, al intervalo $I = [-2, 2]$, f sí está acotada superiormente (sirve como cota superior $M = 5$); así pues, la función f sí está acotada en $[-2, 2]$.



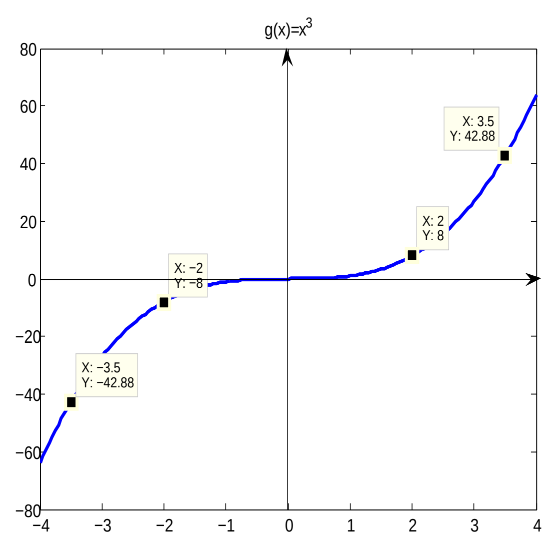
Esta función no está acotada superior ni inferiormente en $\mathbb{R}$.

Se dice que f es **par** si $f(-x) = f(x)$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, si cualquier número real del dominio y su opuesto tienen la misma imagen (la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje OY).

Se dice que f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ cualquiera que sea $x \in D$; es decir, si cualquier número real del dominio y su opuesto tienen imágenes opuestas (la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen).



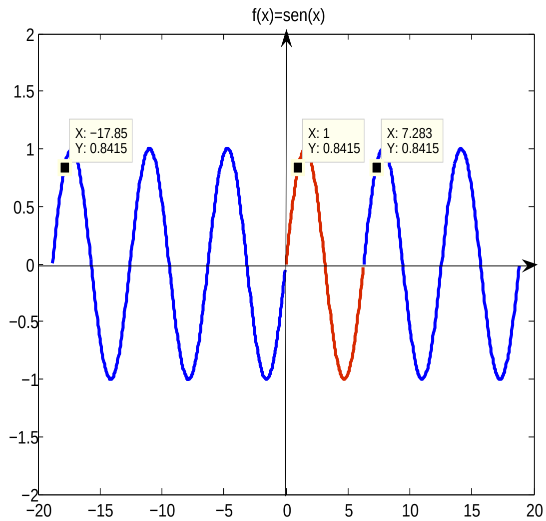
La función $f(x) = 1/(1+x^2)$ es par; en efecto, $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$.



La función $g(x) = x^3$ es impar; en efecto, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Se dice que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **periódica** si existe un número $T > 0$ cumpliendo que $f(x+T) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}$; es decir, si las imágenes de los puntos de la recta real se repiten

al trasladarnos por el eje OX cierta longitud T. A la menor de las cantidades T se le llama **periodo** de f. Gráficamente, una función periódica consta de un trozo fundamental que se va repitiendo a lo largo de todo el eje OX en trozos de longitud igual al periodo.



La función $f(x) = \text{sen }(x)$ es periódica de periodo $2\pi(\simeq 6'283)$; un trozo fundamental de la gráfica es el correspondiente al intervalo $[0, 2\pi]$ (en rojo) del eje OX. El resto de la gráfica consiste en copias repetidas de dicho trozo.

4.3. Composición de funciones

Sean f y g dos funciones. Se define la **composición** de g y f (y se representa $g \circ f$) como la función que a cada x asigna $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Así pues, $g \circ f$ es la función resultante de aplicar f y g sucesivamente y responde al siguiente esquema:

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g\big(f(x)\big)$$

En definitiva, la función $g \circ f$ se define como sigue:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$

Observemos que para que la expresión $g\big(f(x)\big)$ tenga sentido, ha de ocurrir que $f(x)$ esté en el dominio de la función g. Por ello, el dominio de D de $g \circ f$ no sólo depende del dominio de f, sino también de su imagen y del dominio de g.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2 + 1$, la función $g \circ f$ es aquella que sigue el siguiente esquema:

   $$x \xmapsto{f} 3x \xmapsto{g} (3x)^2 + 1$$

   esto es, $(g \circ f)(x) = (3x)^2 + 1 = 9x^2 + 1$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = x+2$, entonces $f \circ g$ es la función definida por:

$$f\big(g(x)\big) = f(x+2) = \frac{1}{(x+2)-2} = \frac{1}{x}.$$

Es interesante observar en este último ejemplo que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Es importante destacar que, en general, $g \circ f \neq f \circ g$, es decir, la composición de funciones no es conmutativa. En efecto, en el último ejemplo $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x}$; sin embargo,

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{x-2} + 2 = \frac{2x-3}{x-2}$$

Por último, es fácil comprobar que la composición de funciones sí es una operación asociativa, esto es, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ cualesquiera que sean las funciones f, g y h que se consideren.

4.4. Inversa de una función

Antes de definir el concepto de función inversa, necesitamos saber qué es una función inyectiva.

Una función $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** si, dados $x_1, x_2 \in D$ distintos, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$; es decir, f es inyectiva si no toma dos veces el mismo valor (la gráfica de una función inyectiva verifica la propiedad de que cualquier recta horizontal corta a dicha gráfica en, a lo sumo, un punto).

Veamos algunos ejemplos:

1. La función $f(x) = 3x+2$ es inyectiva. Para comprobarlo, veamos que dos imágenes iguales han de corresponder a orígenes iguales ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

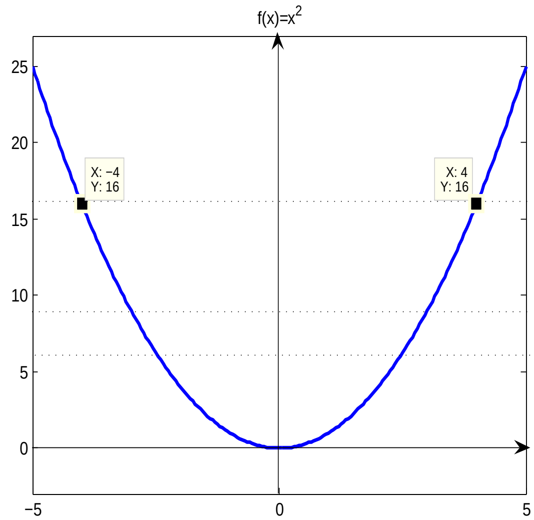
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

2. Cualquier función creciente en todo su dominio es inyectiva.

3. Cualquier función decreciente en todo su dominio es inyectiva.

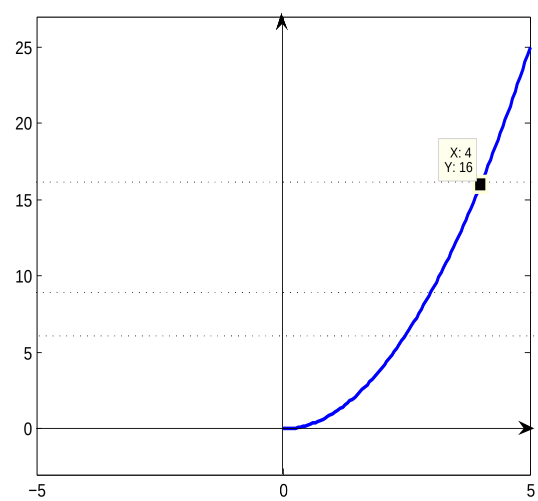
4. La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva; por ejemplo, 4 y -4 tienen la misma imagen ($f(-4) = f(4) = 16$). Gráficamente, la recta horizontal de ecuación $y = 16$ corta a

la parábola $y = x^2$ en dos puntos: $(4, 16)$ y $(-4, 16)$.



La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Cualquier recta horizontal por encima del eje OX corta a su gráfica en dos puntos.

En el ejemplo anterior, si nos quedamos con una mitad de la parábola, obtenemos una función inyectiva.Así, la función $g(x) = x^2$ definida en $[0, +\infty)$ sí es inyectiva.



Dada una función inyectiva $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, la **función inversa** f^{-1} es la que tiene por dominio Im (f) y a cada imagen le asocia su correspondiente origen.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = 3x$, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el triple de x (f es inyectiva por ser creciente). Así, por ejemplo, $f(2) = 6$ y $f(4) = 12$. La función inversa f^{-1} tiene por dominio Im $(f) = \mathbb{R}$ y es aquella que a cada valor real le asocia su tercera parte, o sea, $f^{-1}(x) = x/3$; de esta forma, resulta evidente que $f^{-1}(6) = 2$ y $f^{-1}(12) = 4$.

El procedimiento general para obtener la función inversa de una función inyectiva dada,

f, consiste en despejar x de la ecuación $y = f(x)$, poniendo así x como una expresión en función de y, en concreto, $x = f^{-1}(y)$. Veamos algunos ejemplos:

1. Si $f(x) = x^3$, despejando x en $y = x^3$ resulta $x = \sqrt[3]{y}$, de donde

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

(recordemos que el nombre de la variable es intrascendente; de hecho, si resulta más familiar puede escribirse $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$).

2. Si $f(x) = 3x + 2$, despejando x en $y = 3x + 2$ resulta $x = \dfrac{y-2}{3}$, luego

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

(o también $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$).

OBSERVACIONES:

- En este instante es fácil justificar por qué se ha definido la función inversa tan sólo para funciones inyectivas. La idea consiste en que, si una función f no es inyectiva, entonces hay al menos dos valores x_1 y x_2 que van la misma imagen c. Al considerar la "función" inversa, tendríamos que f^{-1} asignaría a c los valores x_1 y x_2, lo que entra en contradicción con el concepto de función (una función asigna a cada valor de la variable independiente una única imagen). Por ejemplo, intentemos obtener la función inversa de $f(x) = x^2$; si procedemos como en los ejemplos anteriores, debemos despejar x de $y = x^2$, resultando ahora $x = \pm\sqrt{y}$, es decir, $f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$. Pero esta expresión última no es una función pues a cada valor y no negativo le asocia dos valores: $+\sqrt{y}$ y $-\sqrt{y}$.

- Si $I \subset \mathbb{R}$, la función **identidad** en I es aquella definida por $id_I(x) = x$ cualquiera que sea $x \in I$. Si f es inyectiva con dominio D, las igualdades siguientes son consecuencias directas de las definiciones de función inversa y función compuesta:

  1. $f^{-1} \circ f = id_D$
  2. $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{Im}(f)}$.

- La gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

◀

4.5. Estudio de las funciones elementales

La mayoría de las funciones con las que se trabaja se obtienen al operar con unas pocas funciones llamadas **funciones elementales**. A continuación se estudian algunas de ellas.

4.5.1. Función polinómica

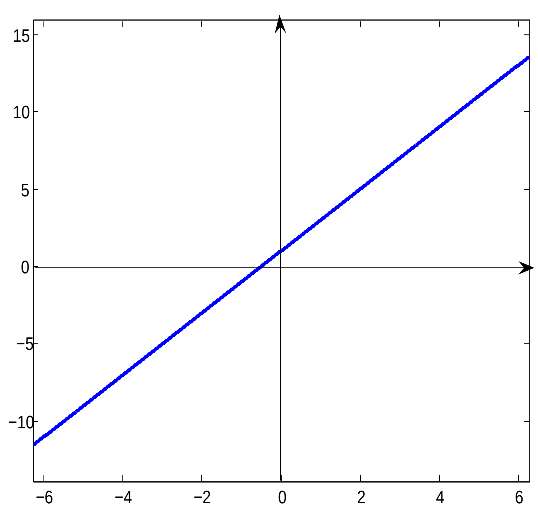
Una **función polinómica de grado** n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

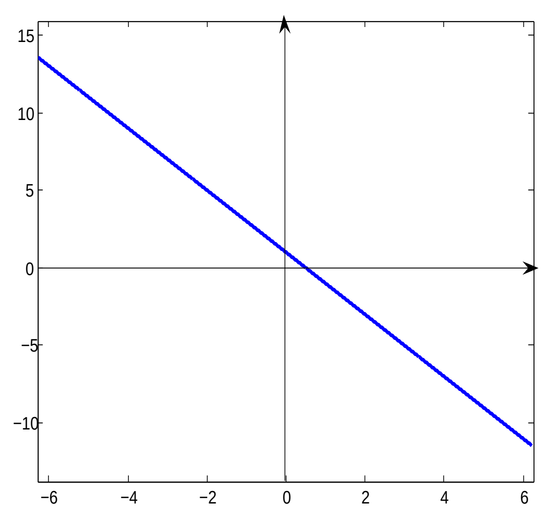
siendo $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$.

Tenemos varios casos particulares especialmente relevantes:

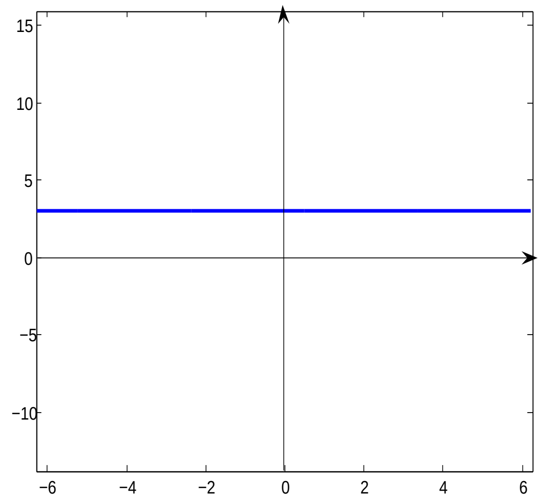
1. **Función afín:** son las funciones de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de este tipo de funciones es una recta.



Función afín $f(x) = ax + b$ con $a > 0$

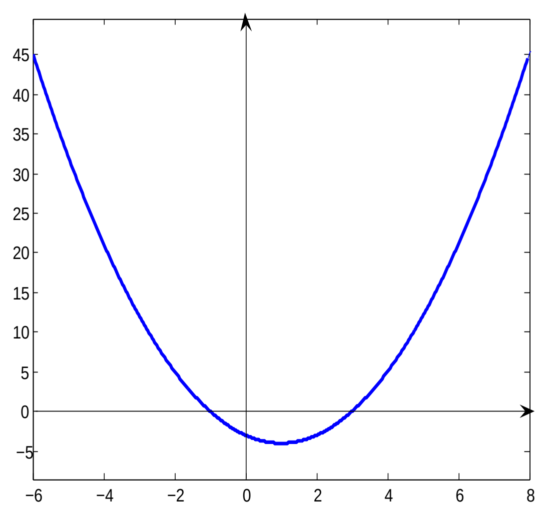


Función afín $f(x) = ax + b$ con $a < 0$

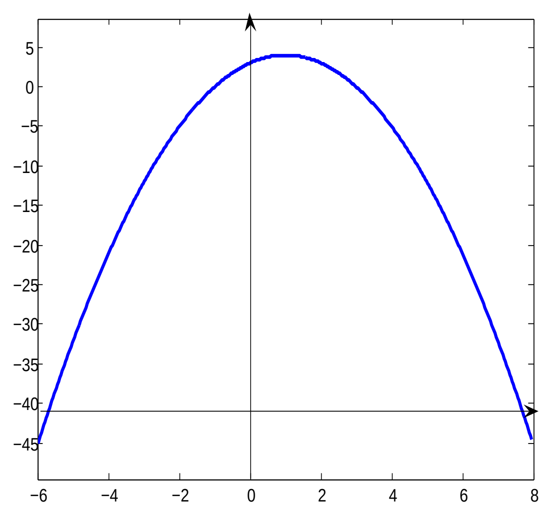


Función afín $f(x) = ax + b$ con $a = 0$

2. **Funciones cuadráticas:** son las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. La gráfica de este tipo de funciones es una parábola. Se llama **vértice** de la parábola al punto en el que la parábola cambia la tendencia de crecimiento; en el caso $a > 0$, corresponde con el punto de menor ordenada mientras que si $a < 0$, el vértice es el punto de mayor ordenada.



Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$

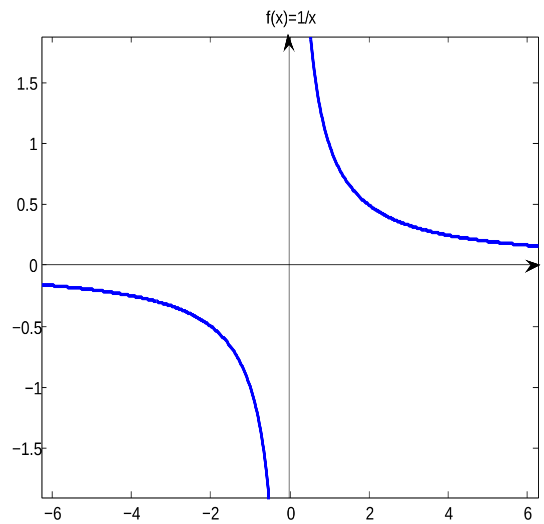


Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$

4.5.2. Función racional

Una **función racional** es una función de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siendo f y g funciones polinómicas. El dominio de estas funciones es el conjunto de todos los números reales que no anulan el denominador.

Dentro de estas funciones cabe destacar la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola.



4.5.3. Función irracional

Una **función irracional** es una función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ siendo $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ y g una función racional.

- Si n es impar, el dominio de la función irracional f coincide con el dominio de g.
- Si n es par, el dominio de la función irracional f es el conjunto formado por los puntos x del dominio de g en los que $g(x) \geq 0$.

4.5.4. Función exponencial

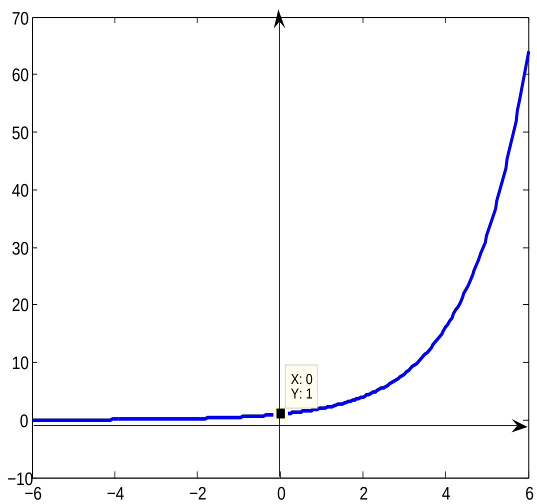
Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$ siendo $a \in \mathbb{R}^+$. El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen es $\mathbb{R}^+$.

A continuación se exponen algunas propiedades de las potencias que resultan muy útiles a la hora de trabajar con las funciones exponenciales (véase capítulo 1):

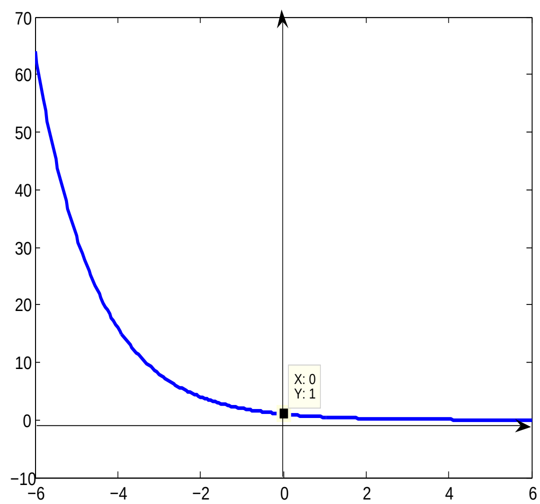
- $a^x > 0$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$

- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- $a^{x_1/x_2} = \sqrt[x_2]{a^{x_1}}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

La gráfica de este tipo de funciones depende de si $a > 1$ o $a \in (0,1)$ (el caso $a = 1$ no tiene interés pues $f(x) = 1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$).



Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 1$



Función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \in (0,1)$

La función exponencial más utilizada es $f(x) = e^x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.5.5. Función logarítmica

La **función logaritmo en base** a es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$ (véase capítulo 1). El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}^+$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

La función logaritmo en base a resulta ser la función inversa de la función exponencial de base a definida anteriormente. Así pues y como ya se ha visto en el capítulo 1, la relación que define al logaritmo es la siguiente:

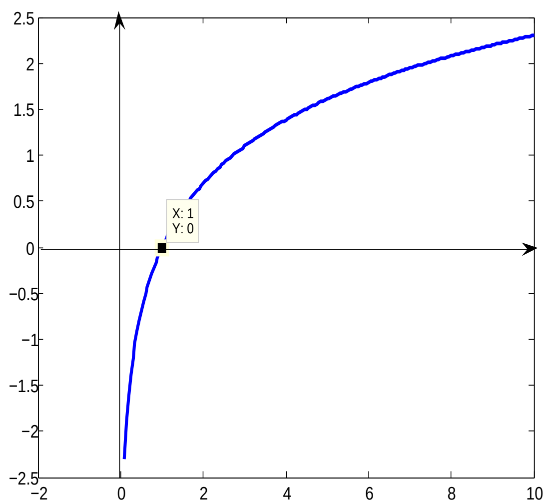
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, $\log_a x$ es el número al que hay que elevar a para obtener como resultado x.

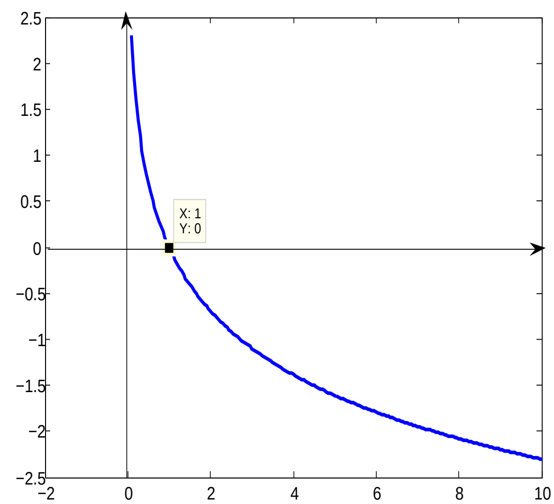
A continuación se recuerdan algunas propiedades de los logaritmos (véase capítulo 1):

- $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- $\log_a \sqrt[p]{x} = \dfrac{1}{p} \log_a x$

Al igual que ocurría con la exponencial, la gráfica de la función logarítmica depende de si la base es mayor que 1 o es un valor entre 0 y 1.



Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a > 1$



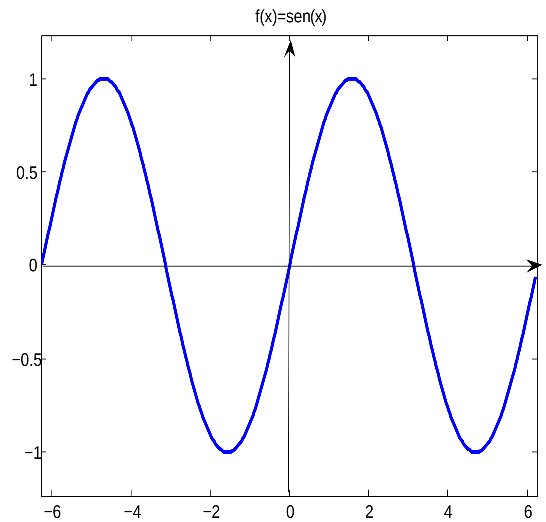
Función logaritmo $f(x) = \log_a x$ con $a \in (0, 1)$

La función logaritmo más utilizada es la de base e (**logaritmo neperiano**) y se denota $f(x) = \ln\ x$ o simplemente $f(x) = \log x$; al ser $e > 1$, su gráfica es como la superior izquierda.

4.5.6. Funciones trigonométricas

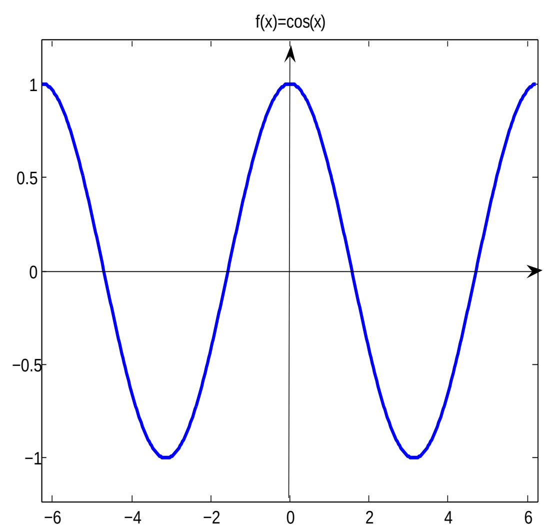
Es conveniente recordar que, en el Cálculo, se emplea el radián para la medida de los ángulos por ser una medida adimensional.

1. Función **seno**: viene dada por $f(x) = \text{sen } x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-1, 1]$.



El seno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x$, es una función impar.

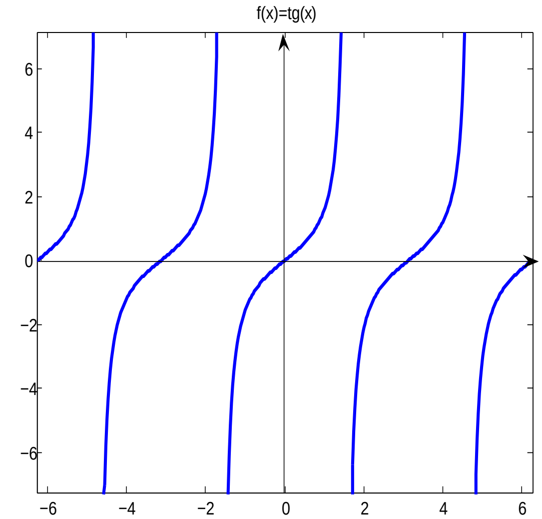
2. Función **coseno**: viene dada por $f(x) = \cos x$. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-1, 1]$.



El coseno es una función periódica de periodo 2π y, puesto que $\cos(-x) = \cos x$, es una función par.

3. Función **tangente**: viene dada por $f(x) = \text{tg } x$. Teniendo en cuenta que $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, su dominio es $\mathbb{R}$ quitando los puntos en los que se anula la función coseno. Por tanto,

el dominio de la función tangente es $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2}: \ k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es $\mathbb{R}$.

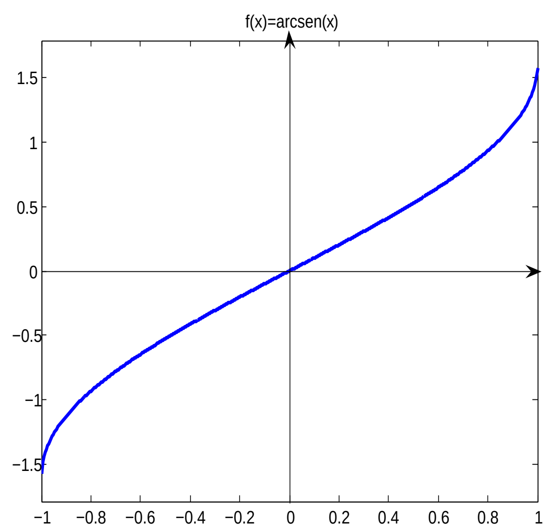


La tangente es una función periódica de periodo π y, puesto que $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\,x$, es una función impar.

4. Función **arco seno**: viene dada por $f(x) = \text{arcsen}\,x$. La función arco seno es la inversa de la función seno cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco seno es la siguiente:

$$\text{arcsen}\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}\,y = x$$

Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

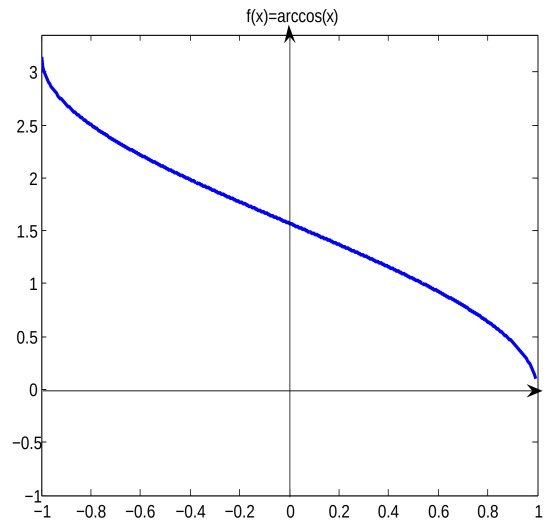


5. Función **arco coseno**: viene dada por $f(x) = \text{arccos}\,x$. La función arco coseno es la inversa de la función coseno cuando está última se considera definida en el intervalo

$[0, \pi]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define al arco coseno es la siguiente:

$$\arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y su imagen, el intervalo $[0, \pi]$.



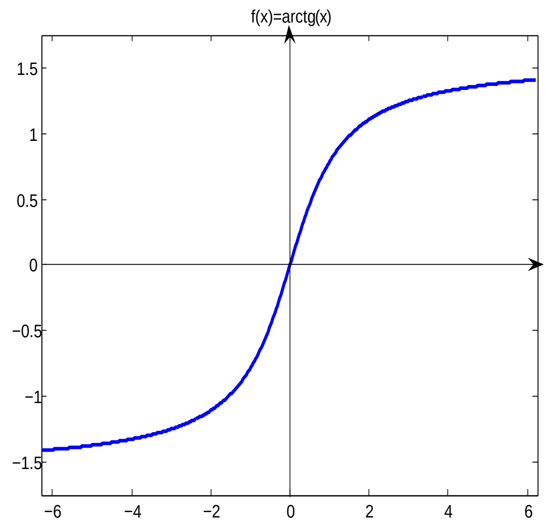
Existe la siguiente relación entre las funciones arco seno y arco coseno

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

6. Función **arco tangente**: viene dada por $f(x) = \operatorname{arctg} x$. La función arco tangente es la inversa de la función tangente cuando está última se considera definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (para que sea inyectiva y podamos considerar su función inversa). De esta forma, la relación que define a la arco tangente es la siguiente:

$$\operatorname{arctg} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x$$

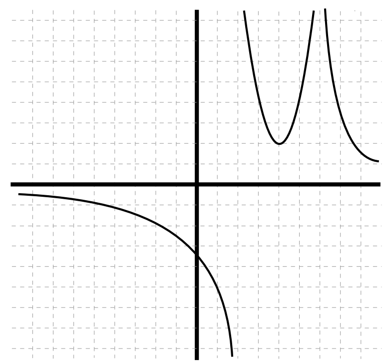
Su dominio es el intervalo $\mathbb{R}$ y su imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.


f(x)=arctg(x)
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−6
−4
−2
0
2
4
6

Ejercicios y problemas

1. Observar la siguiente gráfica e indicar:

- Dominio de definición.
- Recorrido.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.



2. Dibujar la gráfica de una función impar de dominio $\mathbb{R}$, que corte a los ejes en los puntos (-3,0), (0,0) y (3,0) y que tenga un máximo en (-2,1).

3. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(\frac{x^2-1}{x+2})$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$

c) $f(x) = \arccos(\frac{x-1}{x+2})$

d) $f(x) = \sqrt[4]{-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

e) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

4. Dadas las funciones $f(x) = \text{sen } (x-1)$, $g(x) = \frac{x^2+5}{x}$ y $h(x) = e^{x+3}$, realizar las siguientes operaciones:
a) $f \circ g$ *b*) $g \circ h$ *c*) $h^{-1} \circ f$ *d*) $f \circ g \circ h$

5. Demostrar que si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ también lo es. ¿Y si f y g fueran decrecientes? ¿Y si una fuera creciente y la otra decreciente?

6. Calcular la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-4}{3x-5}$

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}} + 5$

c) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $f(x) = \text{arcsen}(x^3 - 1)$

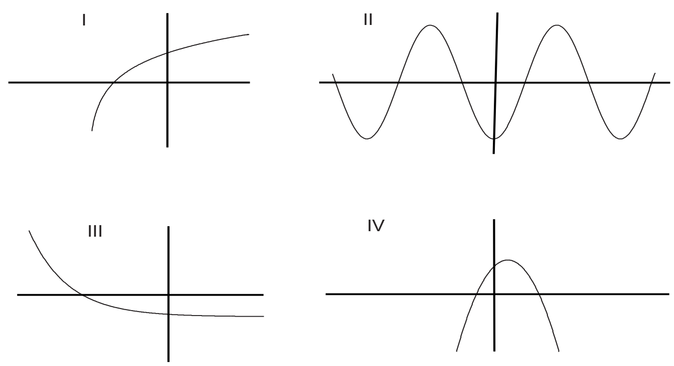
7. Dar dos ejemplos de funciones que coincidan con su inversa.

8. Calcular el periodo de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \cos(2x) + \cos(x+3)$ *b*) $f(x) = \text{sen}^2 x$

9. Obtener una función $f(x)$ de la cual sabemos que es un polinomio de tercer grado que corta a los ejes en los puntos (-2,0), (1,0), (3,0) y (0,3).

10. De entre las siguientes funciones, elegir las que corresponden a las gráficas de la figura.

a) $f(x) = -\cos(2x)$	*b*) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$	*c*) $f(x) = 2^{-x} - 3$
d) $f(x) = -\log(x-1)$	*e*) $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$	*f*) $f(x) = \log(x+3)$
g) $f(x) = -2^x + 3$	*h*) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$	*i*) $f(x) = -(x-1)^2$



11. Para alquilar un coche una empresa nos ofrece las siguientes siguientes tarifas:

- Tarifa A: 30 euros diarios.
- Tarifa B: 12 euros diarios más 6 céntimos por kilómetro recorrido.

Representar la función de gasto en cada opción. ¿A partir de qué recorrido es más rentable la tarifa A que la B?

12. Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota. La altura h, en metros, a la que se encuentra en cada instante t, en segundos, viene dada por $h(t) = 30t - t^2$.

a) Representar gráficamente $h(t)$.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento se alcanza?

c) ¿En qué intervalo de tiempo está a más de 25 metros de altura?

13. Expresar de otra forma (efectuando la división) y representar gráficamente la función $g(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ a partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

14. Dibujar en unos mismos ejes los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = \cos x \quad g(x) = |\cos(x+\pi)|$

b) $f(x) = e^x \quad g(x) = 3 - e^{x-1}$

15. Un tipo de bacterias duplica su número cada 3 horas. Si en el instante inicial hay 100 bacterias,

a) Obtener una ley exponencial de crecimiento del cultivo de la forma $f(x) = Ca^x$ que indique el número de bacterias en función del tiempo transcurrido (en horas). Representar gráficamente la función obtenida.

b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 8 horas?

c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para obtener 60000 bacterias?

d) Calcular y representar gráficamente la función inversa de $f(x)$.

16. Un isótopo radiactivo tiene una semivida de 5 días, es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original en 5 días. Obtener un ley exponencial de decrecimiento de la forma $f(x) = Ca^{-x}$ para expresar la cantidad $f(x)$ después de x días, sabiendo que en el instante inicial existe 100 gramos de dicho isótopo. Dibujar la gráfica de $f(x)$.

17. El valor de un determinado automóvil se deprecia un 10 % anual hasta el décimo año, a partir del cual permanece constante. A los 30 años se considera un clásico por lo que duplica su precio cada 10 años. Expresar el valor del coche en función del tiempo transcurrido sabiendo que el precio de compra fue de 30.000 euros. Dibujar la gráfica de la función obtenida.

18. Una noria tiene un diámetro de 50 m y da una vuelta cada minuto. Dibujar, de forma aproximada, una gráfica que muestre cómo varía la altura del cestillo en el que nos hemos montado en función del tiempo transcurrido. ¿A qué función se parece? Obtener la expresión analítica de la función que has dibujado.

19. Demostrar que $\operatorname{sen} x + \cos x > 1$ para $x \in (0, \pi/2)$. (Indicación: Dibujar y comparar las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}\, x$ y $g(x) = 1 - \cos x$)

20. Demostrar, utilizando representaciones gráficas, que la ecuación $x + e^{-x} = 2$ tiene una solución positiva y otra negativa. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x + e^{-x} = 1$?

Bibliografía

[1] Spiegel, Murray R. y Moyer, Robert E. *Álgebra Superior*, McGraw Hill, 3ª edición., 2007.

Es una especie de resumen sobre lo que todo alumno debería como míniumo de saber al acabar el bachillerato, aunque no contiene nada de trigonometría. Resulta especialmente útil este libro como manual de referencia para aquelos alumnos cuya formación inicial en Matemáticas es deficitaria. Comienza con las nociones más básicas, los niveles de dificultad están muy bien graduados y tiene gran cantidad de ejercicios, todos con su solución, por lo que puede emplearse como manual para aprender sin necesidad de un profesor. También es bueno como manual de consulta.

[2] Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. *Cálculo* (dos volúmenes), Pirámide, 7ª edición, 2002.

[3] Stewart, James. *Cálculo* (dos volúmenes), Thomson Learning, 4ª edición, 2002.

Los dos libros anteriores son muy completos. Pueden servir (cualquiera de ellos) tanto como preparación de conceptos básicos como de libro de texto para estudios más avanzados. Contienen gran cantidad de ejercicios además de varios apéndices sobre temas elegidos (trigonometría, números complejos etc.).

Parte II

Física

Capítulo 5

Magnitudes físicas y unidades

5.1. Magnitudes físicas y su medida

La Física es una ciencia de medidas, pretendiendo asignar un número a todas las *cosas*, de forma que los resultados de todas las observaciones y experimentos deben traducirse en cifras. Por magnitud física se entiende cualquier propiedad de un sistema susceptible de ser medida. Para cada magnitud física que se introduzca es preciso definir su unidad, de forma que el resultado de toda medida será un número con su correspondiente unidad[1]. Realizar una medida consistirá en la comparación de la magnitud a medir con la magnitud patrón, es decir la unidad.

5.2. Magnitudes fundamentales y derivadas

Para definir todas las magnitudes de la Mecánica es suficiente con el uso de tres magnitudes denominadas magnitudes fundamentales: masa (M), longitud (L) y tiempo (T).

El estudio de la termodinámica requiere la introducción de la temperatura como magnitud fundamental. Para el estudio de la electricidad es preciso introducir la corriente eléctrica y finalmente, el estudio de la fotometría precisa de la introducción de la intensidad luminosa como magnitudes fundamentales. Además también se introduce la magnitud cantidad de sustancia, que es el mol.

La mayor parte de las magnitudes físicas son derivadas, es decir se definen a partir de las magnitudes fundamentales. Por ejemplo: superficie, volumen, densidad, velocidad, aceleración, etc.

[1]Existen excepciones como son las magnitudes adimensionales.

5.3. Sistemas de unidades, múltiplos y submúltiplos

Los sistemas de unidades consisten en la definición presisa de las unidades fundamentales, garantizándose que todas las magnitudes derivadas poseerán unidades dentro del sistema elegido. Esto no sucede si al realizar un determinado cálculo se mezclan unidades de diferentes sistemas.

Sistema	Longitud	Masa	Tiempo
SI	metro (m)	kilogramo (kg)	segundo (s)
CGS	centímetro (cm)	gramo (g)	segundo (s)

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T	10^{-1}	deci	d
10^{9}	giga	G	10^{-2}	centi	c
10^{6}	mega	M	10^{-3}	mili	m
10^{3}	kilo	k	10^{-6}	micro	μ
10^{2}	hecto	h	10^{-9}	nano	n
10^{1}	deca	d	10^{-12}	pico	p

5.4. Conversión de unidades y factores de conversión

Los factores de conversión son herramientas ideales para transformar unas unidades en otras. Consisten en un cociente donde, en numerador y denominador aparecen las equivalencias entre unidades en dos sistemas de unidades diferentes (o bien entre múltiplos o submúltiplos), respectivamente. Dicho cociente, obviamente vale uno, por lo que dicho factor puede introducirse en el interior de cualquier expresión. Por ejemplo:

$$1 \text{ milla} = 1609 \text{ m}$$

así,

$$16.3 \text{ millas} = 16.3 \cancel{\text{m}}\text{illas} \times \frac{1609\text{m}}{1 \cancel{\text{m}}\text{illa}} = 26226.7 \text{ m}$$

5.5. Análisis dimensional

El análisis dimensional de una expresión consiste en escribir las dimensiones de cada uno de sus términos, expresándolos en función de las magnitudes fundamentales: L (longitud), M (masa), T (tiempo). En toda expresión debe verificarse que cada uno de los sumandos tenga idénticas dimensiones, así como que primer y segundo miembro de una igualdad también las tengan. La forma de indicar que queremos calcular las dimensiones de una expresión es mediante unos corchetes: [expresión]. Por ejemplo:

- [superficie] $= L^2$
- [volumen] $= L^3$
- [densidad] $= M\ L^{-3}$
- [velocidad] $= L/T = L\ T^{-1}$
- [aceleración] $= L\ T^{-2}$
- [fuerza] $= M\ L\ T^{-2}$

5.6. Notación científica, cálculo de órdenes de magnitud y cifras significativas

En Física es muy habitual encontrarse con números tremendamente grandes o tremendamente pequeños, siendo muy incomodo escribirlos en la notación decimal habitual. Considere por ejemplo los siguientes números: $-0.000000000000000000000000000002345$ ó 123400000000000000000000. Su expresión en notación científica es respectivamente $-2.335\ 10^{-30}$ y $1.234\ 10^{23}$. Como puede observarse, un número en notación científica se escribe como un número mayor que uno y menor que diez[2], siendo este número la mantisa, multiplicado por diez elevado a la potencia correspondiente. Puede haber ocasiones en que resulte conveniente escribir la mantisa como un número mayor que diez o menor que uno: $1234\ 10^{23}$.

Cuando se escribe una cantidad es conveniente dejar claro cuántas cifras de un número son signiticativas, es decir, se conocen con *suficiente precisión*. Una de las caracerísticas de la notación científica es que con ella se expresa de forma precisa el número de cifras significativas. Simplemente se corresponden con el número de cifras que aparece en la mantisa. Por ejemplo, $1.234\ 10^{23}$, tiene cuatro cifras significativas, 1234, siendo 1 la primera cifra significativa, 2 la segunda, 3 la tercera y 4 la cuarta (última). Una consecuencia será que con la notación científica tendremos una idea sobre el error asociado a la cantidad. De forma simplificada se corresponderá con el valor de la unidad, 1, situado en la posición de la última cifra significativa. Siguiendo con el anterior ejemplo, su error será del orden de $0.001\ 10^{23}$. Pudiendo expresarse el número con su error como $1.234\ 10^{23} \pm 0.001\ 10^{23}$.

Cuando se realizan operaciones sencillas, como la suma (resta) y la multiplicación (división), existen reglas para mantener el número correcto de cifras significativas en el resultado. Así, en la suma (resta) de dos números, las cifras más allá de la última cifra decimal en que ambos números tienen cifras signiticativas ya no son significativas. Por

[2]en valor absoluto

ejemplo: $0.034 + 0.01 = 0.04$. En el caso de la multiplicación (división) de dos números, el número de cifras significativas no debe ser mayor que el menor número de cifras significativas de cualesquiera de los dos factores. Por ejemplo: $0.037 \times 0.013 = 4.8\ 10^{-4}$.

El uso de la notación científica también permite realizar fácilmente cálculos de orden de magnitud. Tenga en cuenta que el orden de magnitud de una cantidad no es más que el exponente al que está elevado el número 10. Así, el orden de magnitud de $1.234\ 10^{23}$ será 23 mientras que el de $-2.335\ 10^{-30}$ será -30. El orden de magnitud de su producto será -7, es decir su suma, mientras que el de su suma o resta será 23, es decir, siempre dominará el mayor de las órdenes de magnitud.

Ejercicios y problemas

1. ¿Todo número debe ir acompañado de una unidad? Justifique su respuesta con ejemplos.

2. Exprese en unidades del sistema internacional: velocidad, aceleración, energía, densidad, calor específico, momento lineal y momento angular. Nota: vea el apéndice para las definiciones.

3. Los grados centígrados, $^\circ$ C y los kelvin, K, tienen el mismo tamaño, en cambio sus orígenes son diferentes: 0°C= 273.15 K. ¿Es correcto $\frac{^\circ \cancel{C}}{\cancel{K}}$?

4. Un metro es igual a 39.37 pulgadas (inch). Calcule, cuántos centímetros cuadrados son 70.2 pulgadas^2.

5. Un pie equivale a 0.3048 m. Calcule cuántos dm^3 son 204.32 pie^3.

6. Una persona adulta debe consumir diariamente unas 2500 kcal. Calcule a cuántos julios, btu y kWh equivale esa cantidad de energía. Nota: vea el apéndice para las conversiones.

7. La densidad se define como la masa dividida por el volumen. Teniendo en cuenta que una libra es igual a 0.4539 kg y que un pie equivale a 0.3048 m. Calcule en el SI la densidad de una esfera de 7.5 libras de masa y 17.2 pies de radio. Nota: $V_{\text{esfera}} = 4/3\pi\ R^3$.

8. El kilogramo patrón es un cilindro de platino-iridio de 39.0 mm de altura y 39.0 mm de diámetro. ¿Cuál es la densidad del material en el SI y en libras/pies^3?

9. La masa del planeta Saturno es de 5.64 10^{26} kg, siendo su radio de 6.00 10^7 m. Calcule la densidad media del planeta en el SI y en el sistema CGS. Nota: $V_{\text{esfera}} = 4/3\pi R^3$.

10. En un hogar se consumen 450 kWh de electricidad en un mes. Exprese esa energía en ergios, julios, btu y MeV. Nota: vea el apéndice para las conversiones de unidades.

11. En un hogar se consumen 450 kWh de electricidad en un mes. Si la potencia es la energía dividida por el tiempo, calcule la potencia promedio consumida en dicho hogar, expresada en W. Nota: vea el apéndice para las conversiones de unidades.

12. Un atleta puede recorrer cien metros en 9.90 s. ¿Cuál es su velocidad en m/s y en km/h?

13. Si el agua tiene una masa molecular de 18 g/mol y el número de Avogadro vale 6.023 10^{23}, calcule cuántas moléculas de agua hay en 5.5 g de agua.

14. Si el agua tiene una masa molecular de 18 g/mol y una densidad de 1 g/cm^3 y el número de Avogadro vale 1.6023 10^{23}, calcule cuántas moléculas de agua hay en un vaso cilíndrico de 10 cm de altura y 3 cm de radio. Nota: $V_{\text{cilindro}} = h \cdot \pi r^2$.

15. Demuestre que la expresión $v_f = v_i + a \cdot t$ es dimensionalmente correcta, donde v es una velocidad, a una aceleración y t el tiempo. Nota: la dimensión de la aceleración en el SI es m/s^2.

16. Demuestre que la expresión $e = v_i \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ es dimensionalmente correcta, donde e es el espacio, v es una velocidad, a una aceleración y t el tiempo. Nota: la dimensión de la aceleración en el SI es m/s^2.

17. Verifique si esta expresión es dimensionalmente correcta: $F = m \cdot v^2/e$ donde F es una fuerza, m una masa, e es un espacio y v una velocidad. Nota: la unidad de fuerza en el SI es el newton, N, que es equivalente a $kg \cdot m/s^2$.

18. El consumo de gas de una familia viene descrito por $V = 12.32\ t + 0.0043\ t^2$ donde V es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo expresado en días. Realice los cambios apropiados para que el volumen quede expresado en cm^3 y el tiempo en minutos. Escriba las unidades de cada uno de los coeficientes que aparecen en la expresión, tanto para la situación inicial como para la transformada.

19. El consumo de electricidad de una familia viene descrito por $E = 5.32\ t + 0.0043\ t^2$ donde E es la energía expresada en kWh y t el tiempo expresado en horas. Realice los cambios apropiados para que la energía venga expresada en julios y el tiempo venga expresado en horas. Escriba las unidades de cada uno de los coeficientes que aparecen en la expresión, tanto para la situación inicial como para la transformada.

20. Se tiene una figura geométrica caracterizada por las longitudes l_1, l_2 y l_3. Si nos proporcinan las siguientes fórmulas:

a) $l_1 \times l_2 + 1/2 \times l_3 \times l_1 + 1/2 \times l_2 \times l_3$

b) $2 \times l_1 + 3 \times l_2 + 3 \times l_3$

c) $l_1 \times l_2 \times l_3$

d) $l_1 \times l_2 + l_1 + l_2$

¿Cuál de ellas describe un volumen? ¿Y una superficie?¿Y un perímetro?¿Cuál es dimensionalmente incorrecta?

21. Considere que tiene una habitación de forma cúbica y 5 m de lado. Si una pelota de ping-pong tiene un radio aproximado de 2 cm, dé una estimación del número de pelotas que cabrán en la citada habitación.

22. Un galón de pintura (3.78 10^{-3} m^3) cubre un área de 25.0 m^2. Estime qué espesor en μm tendrá la capa de pintura.

23. Un neumático tiene una duración de 80000 km. Dé una estimación del número de vueltas que dará dicho neumático.

24. Si la Luna está a unos 380000 km de la Tierra y da una vuelta alrededor de la Tierra cada 28 días, dé una estimación de su velocidad en km/h.

25. Diga cuántas cifras significativas y cuáles tienen los siguientes números: a) 7.234, b) 0.0003450, c) 100, d) 123.000 10^3.

26. Un año tiene una duración de 365.242199 días. Exprese dicha duración en notación científica en segundos y en horas usando 5 cifras significativas.

Capítulo 6

Vectores

6.1. Sistemas de coordenadas

La Física se ocupa en muchas ocasiones de la descripción matemática del movimiento de un objeto. Es preciso, por tanto, tener un procedimiento con el que específicar la posición de un objeto en el espacio. Para poder especificar la posición de un objeto sobre una línea es suficiente con especificar un número, su coordenada. En un plano se requieren dos números, es decir, dos coordenadas, mientras que en el espacio se precisan tres coordenadas. Para poder especificar las coordenadas es imprescindible tener un sistema de coordenadas.

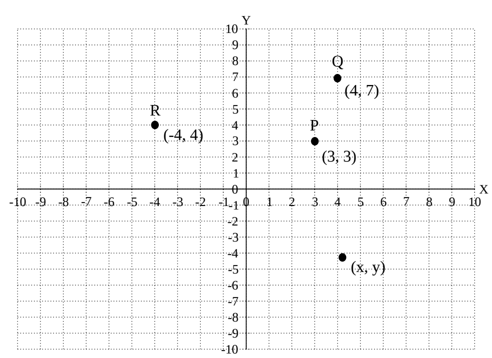


Figura 6.1: Ejemplo de sistema de coordenadas cartesiano en dos dimensiones.

Un sistema de coordenadas se define mendiante:

- Un punto de referencia O, denominado origen.
- Un conjunto de direcciones (ejes), con unas etiquetas y escalas.
- Instrucciones acerca de cómo etiquetar un punto del espacio respecto a dicho sistema.

El sistema de coordenadas más usado es el sistema cartesiano, también llamado sistema de coordenadas ortogonal (vea figura 6.1). Éste tiene como características el poseer unos ejes perpendiculares entre sí, especificándose las coordenadas con un par de números (x, y). La primera coordenada se corresponde con el eje x, siendo éste el eje horizontal, mientras que la segunda con el eje y que es el eje vertical. Caso de trabajar en tres dimensiones, aparecerá una tercera coordenada denominada z. Las etiquetas x, y y z, así como las mencionadas orientaciones suelen ser la notación más habitual, aunque dependiendo del autor o del contexto pueden variar.

En dos dimensiones, existe otro sistema de coordenadas muy útil denominado coordenadas polares planas (r, θ) (vea figura 6.2). Verificándose:

$$x = r\cos\theta \tag{6.1}$$

$$y = r\sin\theta \tag{6.2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{6.4}$$

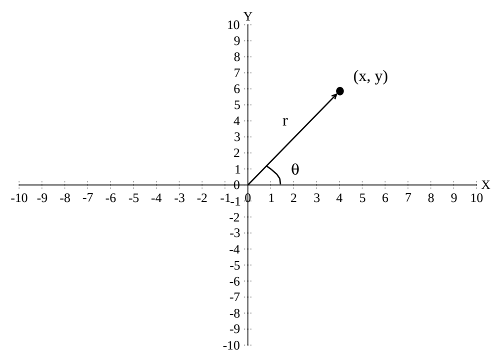


Figura 6.2: Ejemplo de sistema de coordenadas polares planas.

6.2. Vectores y escalares

Definición de escalar: magnitud física que queda completamente especificada mediante un número real y las unidades apropiadas.

Definición de vector: magnitud física que debe ser especificada mendiante un módulo, una dirección, un sentido y su correspondiente unidad. De forma alternativa se puede especificar mediante un conjunto de 2 números (v_1, v_2) ó tres números (v_1, v_2, v_3), para dos y tres dimensiones, respectivamente, además de la unidad apropiada[1]. Los vectores suelen escribirse mediante las notaciones: $\vec{a}$ ó $\mathbf{a}$. El módulo del vector expresa el tamaño de éste y la dirección y sentido su orientación en el espacio

[1]Una definición más estricta de escalar y de vector se realiza en base a sus propiedades de transformación entre distintos sistemas de referencia.

6.3. Vectores y sistemas de referencia

El par de puntos (v_1, v_2) con el que puede especificarse un vector en dos dimensiones, el trío (v_1, v_2, v_3) en tres dimensiones, se denomina componentes del vector. Dichas componentes se corresponden con la proyección del vector sobre unos ejes coordenados (vea figura 6.3)

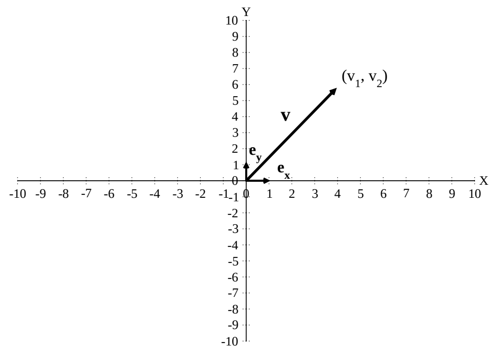


Figura 6.3: Expresión de un vector en término de sus componentes.

La anterior notación significa que:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_x + v_2\mathbf{e}_y \ , \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_x + v_2\mathbf{u}_y \ , \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \ , \tag{6.5}$$

en dos dimensiones ó,

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_x + v_2\mathbf{e}_y + v_3\mathbf{e}_z \ , \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_x + v_2\mathbf{u}_y + v_3\mathbf{u}_z \ , \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \ , \tag{6.6}$$

en tres, donde $\mathbf{e}_x, \mathbf{u}_x, \mathbf{i}$; $\mathbf{e}_y, \mathbf{u}_y, \mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_z, \mathbf{u}_z, \mathbf{k}$ son los vectores unitarios (vea sección 6.6) en las direcciones x, y, z respectivamente.

El módulo de un vector puede expresarse mediante:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{6.7}$$

y su orientación como:

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1}, \tag{6.8}$$

donde θ se corresponde con el ángulo que forma el vector con el eje x positivo.

Tenga en cuenta que, a excepción de los vectores que indican la posición de un punto, radiovector, los vectores en general pueden ser desplazados en el espacio siempre que mantengan constante su orientación y módulo. Esto será preciso para realizar diversas operaciones matemáticas con ellos.

6.4. Cálculo del vector que une dos puntos

Sean dos puntos $P = (P_x, P_y)$ y $Q = (Q_x, Q_y)$. Para calcular el vector que va del punto P hasta el punto Q simplemente se realizará la operación:

$$\mathbf{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y) \tag{6.9}$$

6.5. Algunas propiedades de los vectores

6.5.1. Suma

Para sumar dos vectores, estos deben tener las mismas unidades. Geométricamente, la suma se realiza como se indica en la figura 6.4. Si usamos componentes:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) \tag{6.10}$$

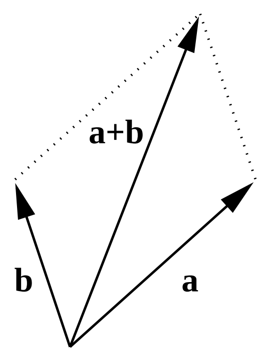


Figura 6.4: Suma de vectores.

La suma de vectores verifica la propiedad conmutativa:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \tag{6.11}$$

y la asociativa:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \tag{6.12}$$

6.5.2. Opuesto de un vector

Geométricamente, el opuesto de un vector se construye como un vector de igual módulo y dirección pero sentido opuesto al original . Si usamos componentes:

$$-\mathbf{a} = (-a_x, -a_y) \tag{6.13}$$

6.5.3. Resta de vectores

Geométricamente, se corresponde con la suma de un vector con el opuesto de otro vector (vea figura 6.5). Si usamos componentes:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) \tag{6.14}$$

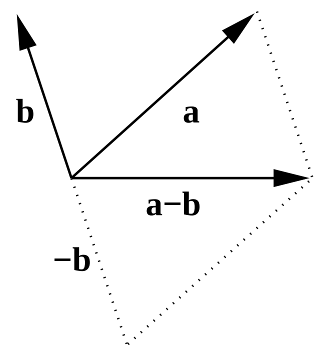


Figura 6.5: Resta de vectores.

6.5.4. Producto de un vector por un escalar

Geométricamente, se corresponde con un vector de igual dirección y sentido (si el escalar es negativo el sentido cambia) que el original y con un módulo igual al producto del módulo original por el valor del escalar en valor absoluto. Si usamos componentes:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y) \tag{6.15}$$

El producto de un escalar por un vector verifica la propiedad distributiva:

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \tag{6.16}$$

6.5.5. Producto escalar

Operación que se realiza con dos vectores y cuyo resultado es un escalar,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta, \tag{6.17}$$

Donde θ se corresponde al ángulo que forman **a** y **b**.

Si empleamos componentes en dos dimensiones:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{6.18}$$

y en tres:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{6.19}$$

6.5.6. Producto vectorial

Operación que se realiza con dos vectores y cuyo resultado es otro vector. Esta operación sólo puede hacerse con vectores en tres dimensiones. Esta operación se designa mediante: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Su módulo vale:

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta, \tag{6.20}$$

donde θ se corresponde al ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Su dirección es perpendicular al plano que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y su sentido viene definido por el uso de la *regla del sacacorchos* al hacer girar $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$ por el camino más corto.

Mediante el uso de componentes, el producto vectorial se calcula con un simple determinante:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y\ b_z - a_z\ b_y)\ \mathbf{e}_x - (a_x\ b_z - a_z\ b_x)\ \mathbf{e}_y + (a_x\ b_y - a_y\ b_x)\ \mathbf{e}_z \tag{6.21}$$

6.6. Vectores unitarios

Un vector unitario es aquel cuyo módulo es 1. Convertir un vector en unitario es muy sencillo:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}(a_x, a_y) \tag{6.22}$$

Ejercicios y problemas

1. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (5, 6)$ y $\mathbf{b} = (7, 2)$. Calcule el módulo de dichos vectores, su vector suma y el módulo del vector suma. Realice también la suma gráficamente.

2. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 9)$ y $\mathbf{b} = (-7, -2)$. Calcule el módulo de dichos vectores, su vector suma y el módulo del vector suma. Realice también la suma gráficamente.

3. Sean los puntos $P = (5, 4)$ y $Q = (9, 2)$. Calcule los vectores $\mathbf{PQ}$ y $\mathbf{QP}$ así como sus respectivos módulos. Calcule también $\mathbf{PQ} + \mathbf{QP}$.

4. Un coche viaja en línea recta del punto $P = (5, 2)$ al $Q = (3, 2)$, donde todas las coordenadas están expresadas en m. ¿Qué distancia ha recorrido?

5. Un coche viaja en línea recta del punto $P = (5, 2)$ al $Q = (3, 2)$ y finalmente al punto $P = (5, 2)$ de nuevo, donde todas las coordenadas están expresadas en m. ¿Qué distancia ha recorrido? ¿Cuál ha sido su desplazamiento?

6. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 0)$ y $\mathbf{b} = (5, 2)$. Calcule el módulo de dichos vectores, la diferencia de ambos vectores, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y el módulo del vector diferencia. Realice también la resta gráficamente.

7. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 9)$ y $\mathbf{b} = (-5, -2)$. Calcule el módulo de dichos vectores, la diferencia de ambos vectores, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y el módulo del vector diferencia. Realice también la resta gráficamente.

8. Sea un vector que parte del origen de coordenadas y tiene un módulo $r = 10$ y un ángulo polar $\theta = 30°$. Calcule sus coordenadas cartesianas. Una vez obtenidas las coordenadas, calcule su módulo usándolas.

9. Sea el vector $\mathbf{a} = (2, 2)$. Calcule sus coordenadas polares.

10. Sea el vector $\mathbf{a} = (-2, 2)$. Calcule sus coordenadas polares.

11. Sean los puntos $P = (5, 4)$ y $Q = (9, 2)$. Calcule las coordenades polares de los los vectores $\mathbf{PQ}$ y $\mathbf{QP}$.

12. Dos coches parten del origen. Uno se desplaza 20 km a lo largo del eje OX, mientras que el otro se desplaza 50 km a lo largo del eje OY. ¿A qué distancia se encuentran en el instante final uno del otro?

13. Dos coches parten del origen. Uno se desplaza 20 km a lo largo de una dirección que forma 45° con el eje OX, mientras que el otro se desplaza 50 km a lo largo de una dirección que forma $-45°$ con el eje OX. ¿A qué distancia se encuentran en el instante final uno del otro?

14. Se observa desde el origen una torre que tiene 100 de altura y está situada en el punto $(30, 40)$ m. ¿A qué distancia está la punta de la torre del origen?

15. Un patinador describe un cuarto de circunferencia de 10 m de radio. ¿Cuánto vale la distancia que ha recorrido? ¿Y el módulo del vector desplazamiento?

16. Un avión vuela desde su base hasta el lago A, recorriendo una distancia de 280 km en una dirección que forma 45° con el eje OX. Lanza unos suministros y vuela hasta el punto B que se encuentra a 200 km del punto A a lo largo de una dirección que forma 135° con el eje OX. Finalmente retorna a su base. Represente gráficamente el recorrido del avión y calcule la distancia recorrida así como el módulo del vector desplazamiento.

17. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 0)$ y $\mathbf{b} = (5, 2)$. Calcule el vector $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b}$ así como su módulo.

18. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 7)$ y $\mathbf{b} = (-5, 2)$. Calcule el vector $9\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ así como su módulo y ángulo polar.

19. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 7, -3)$ y $\mathbf{b} = (-5, 2, 8)$. Calcule el vector $9\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ así como su módulo.

20. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 7)$ y $\mathbf{b} = (-5, 2)$. Calcule su producto escalar.

21. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (2, 7, 10)$ y $\mathbf{b} = (3, -5, 2)$. Calcule su producto escalar.

22. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (-2, 7, 10)$ y $\mathbf{b} = (3, 0, 1)$. Calcule el ángulo que forman.

23. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (-2, 7, 10)$ y $\mathbf{b} = (3, 0, 1)$. Calcule $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

24. Sean los vectores: $\mathbf{a} = (1, 2, 10)$ y $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$. Calcule $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

25. Sean dos torres de telefonía que tienen una altura de 100 m y están situadas en los puntos $(30, 40)$ km y $(20, -80)$ km respectivamente. Desde el origen de coordenadas se apunta con un rayo laser al extremo superior de ambas torres. ¿Qué ángulo forman dichos rayos?

26. ¿A qué distancia están las torres del problema anterior?

Capítulo 7

Cálculo diferencial

En el estudio de la física universitaria es imprescindible tener soltura en los elementos básicos del cálculo diferencial, así como una idea clara del concepto de derivada, su significado y posibles aplicaciones. Este tema se aborda desde un punto de vista práctico, evitando un tratamiento riguroso con vistas a que el alumno se familiarice con el concepto de derivada de una función.

7.1. Definición de derivada

La derivada de una función de una variable $y = f(x)$ es una nueva función de x, $dy/dx = df(x)/dx$ o de forma abreviada[1] $y' = f'(x)$. Esta función nos da la razón de cambio de la función y al variar la variable independiente x, esto es, nos dice si al variar x la función y crece, decrece o permanece constante.

La derivada de una función de una variable $y = f(x)$, dy/dx se define como aquella función que para cada valor de x es igual al límite de la razón entre el incremento de la función Δy y el incremento correspondiente del argumento Δx cuando Δx tiende a cero

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad . \tag{7.1}$$

7.2. Interpretación geométrica de la derivada

En la representación gráfica de la función $y = f(x)$ en un sistema de coordenadas cartesiano (ver figura 7.1) la derivada de la función en un punto x es igual a la tangente del ángulo α, $f'(x) = \tan \alpha$, donde α es el ángulo formado por el eje OX y la recta tangente a la curva en el punto escogido.

[1]También son comunes las notaciones $Dy = Df(x)$, $D_x y = D_x f(x)$ y $\dot{y} = \dot{f}(x)$.

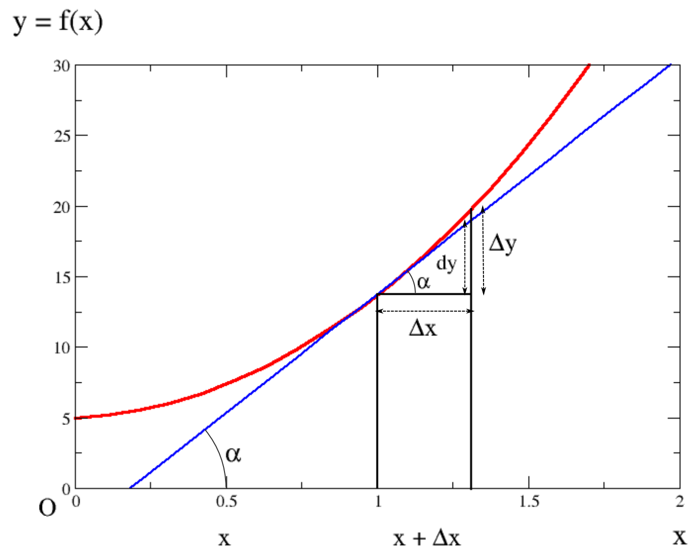


Figura 7.1: Interpretación geométrica de la derivada.

El ángulo α se considera desde la dirección positiva del eje OX y en sentido antihorario. Teniendo esto en cuenta, cuando la derivada de una función en un punto es **positiva**, la función es **creciente**. Inversamente, si la derivada es **negativa**, la función es **decreciente**. El mayor o menor valor absoluto de la derivada implica que la función crece más o menos rápidamente. Por último, si la derivada de una función en un punto se hace cero, a dicho punto se le llama un *punto crítico* y puede ser un máximo, un mínimo, o un punto de inflexión.

7.3. Diferenciales

La diferencial de una variable z se indica dz y se define de diferente modo, dependiendo que la variable sea independiente o una función. Supongamos que z es una función de la variable independiente x: $z = f(x)$. La diferencial de la variable independiente, dx, corresponde a un incremento de dicha variable al que se puede asignar un valor arbitrario (en general pequeño, los diferenciales pueden reemplazar los incrementos infinitesimales). Sin embargo, el diferencial de la variable z es igual al producto de la derivada de la función por la diferencial de la variable independiente

$$dz = \frac{df(x)}{dx}dx \quad . \tag{7.2}$$

La interpretación geométrica de la diferencial de la variable dependiente puede verse en la figura 7.1. Representa el incremento que recibe la ordenada de la tangente a la curva en el punto x dado un incremento de la variable independiente dx.

7.4. Derivadas y diferenciales de orden superior

La derivada segunda de una función de una variable $y = f(x)$ se designa por y'', $f''(x)$ ó $d^2f(x)/dx^2$ y es la derivada de la derivada de la función $f(x)$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] \quad . \tag{7.3}$$

De forma análoga se definen las derivadas tercera, cuarta, etc.

La diferencial segunda de una función de una variable $y = f(x)$ se designa por d^2y y es la diferencial de la diferencial primera, por tanto

$$d^2f(x) = [f''(x)]dx^2 \quad . \tag{7.4}$$

Análogamente se definen las diferenciales de orden superior.

7.5. Reglas de derivación

Combinando las reglas de derivación que se dan a continución con la tabla de derivadas de las funciones elementales (Tabla 7.1) es posible calcular la derivada de cualquier función elemental. Suponemos que u, v, w y z son funciones de una variable, siendo la variable independiente x. Las reglas que se dan a continuación son validas para el cálculo de diferenciales, sustituyendo derivada por diferencial en el enunciado de las reglas.

7.5.1. Derivada de una suma

La derivada de una suma de dos o más funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función.

$$\frac{d}{dx}(u + v + w + \ldots + z) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots + \frac{dz}{dx} \tag{7.5}$$

7.5.2. Derivada de un producto

La derivada del producto de n funciones es igual a la suma de n términos, donde cada término es igual que el producto inicial con la diferencia que uno de sus factores se sustituye sucesivamente por su derivada .

$$\frac{d}{dx}(u{\cdot}v{\cdot}w{\cdot}\ldots{\cdot}z) = \frac{du}{dx}{\cdot}v{\cdot}w{\cdot}\ldots{\cdot}z+u{\cdot}\frac{dv}{dx}{\cdot}w{\cdot}\ldots{\cdot}z+u{\cdot}v{\cdot}\frac{dw}{dx}{\cdot}\ldots{\cdot}z+\ldots+u{\cdot}v{\cdot}w{\cdot}\ldots{\cdot}\frac{dz}{dx} \quad . \tag{7.6}$$

Por ejemplo, para el caso de dos funciones

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \quad . \tag{7.7}$$

7.5.3. Derivada de una función con un factor constante

El factor constante se puede sacar fuera de la derivada

$$\frac{d}{dx}(kv) = k\frac{du}{dx} \quad , \tag{7.8}$$

donde k es un factor constante.

7.5.4. Derivada de un cociente

La derivada de un conciente se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad . \tag{7.9}$$

7.5.5. Regla de la cadena

La regla de la cadena es una de las más útiles reglas de derivación y se aplica a una función compuesta o *función de funciones*. Si $y = f(u)$ y u es una función de la variable independiente x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} \quad . \tag{7.10}$$

Si $z = g(y)$ y, como en el ejemplo anterior, $y = f(u)$ y u es una función de la variable independiente x, entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} \quad . \tag{7.11}$$

Función	Derivada	Función	Derivada
k (constante)	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	u^n	$nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(u)$	$\exp(u)\frac{du}{dx}$
k^x	$k^x\ln(k)$	u^v	$vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln(u)\frac{dv}{dx}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u)$	$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}\log(e)=\frac{1}{x\ln(10)}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x}\log_a(e)=\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$	$\mathrm{cotan}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}=\mathrm{cosec}^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccotan}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Cuadro 7.1: Tabla de derivadas de las funciones elementales. Se denota por x a la variable independiente, por u a una función de x y por k a una constante.

Ejercicios y problemas

1. Haciendo uso de la definición de derivada como paso al límite, encuentre la derivada de las funciones siguientes:

   (a) $f(x) = 2x + 3$
   (b) $f(x) = \cos x$

2. Haciendo uso de la definición de derivada como paso al límite, encuentre la derivada de las funciones siguientes:

   (a) $f(y) = 2y^3 + 7$
   (b) $f(y) = 3\sin(2y)$

3. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
   (b) $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 5\right)^2$
   (c) $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 5\right)^{10}$

4. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 2x^2 + \frac{5}{x}$
   (b) $f(x) = \frac{5}{x+4}$
   (c) $f(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$

5. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = \frac{5t^2 + \frac{3}{2}t + 1}{t}$
   (b) $f(t) = \left(\frac{5t^2 + \frac{3}{2}t + 1}{t}\right)^2$
   (c) $f(y) = \frac{5t^2 + \frac{3}{2}t + 1}{t^2}$

6. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \sin x$
   (b) $f(x) = \sin\left(x^2 + 3\pi\right)$
   (c) $f(x) = \cos\left(2x^2 + 3\pi\right)^{10}$

7. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \sin^2 x$
   (b) $f(x) = \sin^2\left(2x^2 + 3\right)$
   (c) $f(x) = \sin^2\left(2x^2 + 3\right)^{10}$

8. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

   (a) $g(t) = \exp(-\pi t)$
   (b) $g(t) = \exp\left(-2t^2\right)$
   (c) $g(t) = \exp\left(2t^2 + 5t\right)$

9. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \ln x$
   (b) $f(x) = \ln(5x^3 + 1)$
   (c) $f(x) = \ln\left(e^{5x^3+1}\right)$

10. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
    (a) $f(x) = \ln(\cos x)$
    (b) $f(x) = \ln\left[\cos^2(2x^2 + 3)\right]$

11. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
    (a) $f(x) = \ln\left(\frac{3x+5}{x+9}\right)$
    (b) $f(x) = \frac{\ln\left(x^6-3x\right)}{x+9}$

12. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
    (a) $f(z) = 8^{\log_{10} z}$
    (b) $f(z) = 5^{\sqrt{z^2+2}}$

13. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
    (a) $f(x) = \arccos(\exp(3x) + 1)$
    (b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\ln\sqrt{6x+2}\right)$

14. Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:
    (a) $f(t) = (\sin 2\pi t)^{3t}$
    (b) $f(t) = (\tan x)^{x+6}$

15. Diga si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en el origen ($t = 0$)
    (a) $f(t) = (\sin \pi t)^3$
    (b) $f(t) = (\tan x)^{x+6}$

16. Diga si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en el punto $x = 1$:
    (a) $g(x) = \exp(-2\pi x^2)$
    (b) $g(x) = -3x^3 \exp(-2x)$

17. Utilizando la definición de diferencial, encuentre $\frac{dy}{dx}$, sabiendo que las variables y y x están relacionadas implícitamente mediante las ecuaciones y que $y = f(x)$:
    (a) $\sin y = \cos 2x$
    (b) $y^2 \sin x + y = \arctan x$

18. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x viene dada por:

    $$x(t) = t^2 + 5t + 3 \quad ,$$

    donde x viene dado en metros y t en segundos. Calcule la velocidad media de la partícula en los siguientes intervalos de tiempo: (a) entre 5.0 s y 15.0 s ; (b) entre

5.0 s y 6.0 s ; (c) entre 5.0 y 5.1 s ; y (d) entre 5.0 y 5.01 s. Calcule también la velocidad instantánea, $x'(t)$ en $t = 5$ s.

19. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje y viene dada por:

$$y\,(t) = 2t^3 - 6t - 3 \quad ,$$

donde y viene dado en metros y t en segundos. Calcule la velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo. ¿Se detiene en algún instante la partícula?

20. El vector de posición de un cuerpo viene dado por:

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad ,$$

donde r viene dado en metros y t en segundos.

Determine el valor de la velocidad, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ y de la aceleración, $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

21. Un cuerpo se mueve en el plano $x - y$, y su vector de posición en función del tiempo viene dado por:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{j}$$

siendo R y ω dos constantes. Calcule:

a) La ecuación implícita de la trayectoria en el plano $x - y$. ¿A qué figura geométrica corresponde la trayectoria? ¿Qué significado tienen las constantes R y ω?

b) La velocidad y su módulo. ¿Qué tipo de movimiento lleva el cuerpo?

c) La aceleración y su módulo.

22. Un muelle perfectamente elástico de longitud x_0 descansa sobre una mesa sin rozamiento y está sujeto a la pared por uno de sus extremos. Si el muelle se estira hasta que alcanza una longitud x_M y se le suelta, realiza un movimiento armónico simple debido a la fuerza elástica $F = -k(x - x_0)$, donde k es la constante elástica del muelle y x es la longitud del muelle en cada instante. El desplazamiento del muelle con respecto a la posición de equilibrio, $x - x_0$, puede expresarse en función del tiempo mediante la ecuación:

$$x(t) - x_0 = (x_M - x_0)\mathrm{sen}(\omega t + \pi/2)$$

donde ω está relacionada con la constante elástica del muelle, k, y su masa, m, mediante la ecuación $\omega = \sqrt{k/m}$. Calcule la velocidad y aceleración del muelle en función del tiempo, así como el valor de la velocidad y aceleración máximas del muelle.

23. Calcule, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el problema anterior, la potencia instantánea desarrollada por la fuerza elástica en el movimiento armónico simple del muelle, sabiendo que el trabajo que realiza la fuerza elástica al estirarse o comprimirse el muelle desde la posición de equilibrio $x(t=0)=x_0$ hasta que su longitud vale $x(t)$ viene dado por:
$$W(t)=\frac{1}{2}k\left[x(t)-x_0\right]^2 \quad ,$$
y recordando que la potencia instantánea $P(t)$ viene dada por:
$$P(t)=\frac{dW}{dt} \quad .$$

24. Un campo de fútbol tiene una anchura de 50 m y una longitud de 100 m. La anchura de las porterías es de 7.33 m. Un delantero quiere meter un gol tirando desde un punto situado en la línea de saque de banda. Calcule la distancia a la que tiene que tirar el delantero de los banderines de *corner* para que la probabilidad de meter gol sea máxima. Consejo: haga máximo el ángulo que subtienden los postes de la portería desde la posición que ocupa el delantero.

25. Considere un átomo de hidrógeno, y suponga que el núcleo y el electrón son puntuales, siendo la variable r la distancia entre ambos. De acuerdo con la mecánica cuántica, la distribución de probabilidad radial del electrón en el estado fundamental (probabilidad por unidad de longitud de encontrar al electrón en cualquier punto de una cáscara esférica de radio r y espesor infinitesimal dr) viene dada por:
$$P_r(r)=\frac{4r^2}{a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$$
siendo $a_0=0.529\cdot 10^{-10}$ m. el radio de Bohr. Calcule el valor de r para el cual la distribución de probabilidad radial se hace máxima (ese valor de r nos da el valor más probable de la distancia entre el núcleo y el electrón).

26. Los procesos de desintegración radiactivos se describen mediante la ley
$$N(t)=N_0\exp[-\lambda t]$$
donde N_0 es el número de átomos que había inicialmente en una muestra radiactiva, $N(t)$ es el número de átomos originales que quedan en la muestra sin transformarse, λ es una constante característica de cada sustancia y t es el tiempo transcurrido. Se define la actividad de una muestra radiactiva $A(t)$ como la velocidad con la que se transforman los átomos radiactivos, y viene dada por la ecuación:
$$A(t)=-\frac{dN(t)}{dt}$$
Si tenemos inicialmente $N_0=10^{22}$ átomos de una sustancia radiactiva y la constante de desintegración de la muestra vale $\lambda=0,025$ min^{-1}, calcule la actividad inicial, la actividad al cabo de 20 min, la actividad al cabo de 5 horas y la actividad al cabo de 24 horas.

Capítulo 8

Cinemática

8.1. Definición

La observación de la Naturaleza nos permite comprobar que todo está en movimiento. Precisamente, la Cinemática es aquella parte de la Física que trata de describir el movimiento de los cuerpos.

8.2. Sistema de referencia. Vector de posición

Un punto material se mueve cuando cambia su posición respecto a una referencia que hayamos tomado. Por ello, será preciso que en toda cuestión cinemática implantemos un sistema de referencia conveniente que, en nuestro caso, será el denominado cartesiano. Todo punto material tendrá pues unas coordenadas en ese sistema, o lo que resulta equivalente, podemos definir un vector con inicio en el origen del sistema y extremo en la posición del punto en cuestión. Ese vector se denomina vector de posición. Generalmente, y dado que el punto se mueve, las coordenadas de ese vector cambian con el tiempo. Si nos limitamos al movimiento en dos dimensiones:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \tag{8.1}$$

A la expresión anterior se le denomina también ecuación del movimiento. Las funciones x(t) e y(t) se denominan ecuaciones paramétricas del movimiento. Si eliminamos el tiempo entre ellas obtendremos la ecuación de la trayectoria.

8.3. Velocidad y aceleración

Los cambios en el vector de posición permiten definir una nueva magnitud vectorial cinemática: la velocidad. Definimos la velocidad media como:

$$\mathbf{v_m} = \frac{\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)}{t' - t} \tag{8.2}$$

Cuando la diferencia entre los tiempos t´ y t se hace infinitamente pequeña, definimos la velocidad instantánea del móvil:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{8.3}$$

La velocidad se mide en el Sistema Internacional en m/s. Si pudieramos representar la trayectoria que sigue el móvil, la velocidad sería un vector tangente a dicha trayectoria en cada punto de la misma.

También podemos definir una magnitud vectorial que exprese los cambios en la velocidad. En consecuencia, tenemos al igual que antes una aceleración media:

$$\mathbf{a_m} = \frac{\mathbf{v}(t') - \mathbf{v}(t)}{t' - t}. \tag{8.4}$$

Y una aceleración instantánea:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{8.5}$$

La aceleración se mide en m/s^2. Se puede comprobar que, en general, todo vector aceleración tiene dos componentes: a) la aceleración normal que expresa el cambio en dirección del vector velocidad:

$$\mathbf{a_n} = \frac{v^2}{R}\mathbf{u_n}, \tag{8.6}$$

donde R es el denominado radio de curvatura; y, b) la aceleración tangencial que muestra el cambio en el módulo del vector velocidad.

$$\mathbf{a_t} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_t}. \tag{8.7}$$

8.4. Movimiento bajo aceleración constante

El problema que generalmente se plantea en Física es tratar de obtener la ecuación de movimiento de un punto material a partir de las *condiciones mecánicas* del problema. La aplicación de una serie de leyes o principios a una situación determinada suelen conducir a la obtención de una expresión del vector aceleración. Obviamente, para llegar a la ecuación de movimiento se debe integrar 2 veces. La expresión concreta de la ecuación del

movimiento se obtendrá si son conocidas las denominadas *condiciones iniciales*, es decir, un par de datos sobre la posición y la velocidad del móvil en algún instante (generalmente el de t=0). Un caso particularmente sencillo y habitual en los ejercicios es aquel en el que la aceleración es un vector constante en el tiempo (incluyendo aquí el caso en el que incluso sean nula). Conocidas las condiciones iniciales ($\mathbf{r_0}$ y $\mathbf{v_0}$), las correspondientes integraciones llevan a que:

$$\mathbf{v(t)} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t \tag{8.8}$$

$$\mathbf{r(t)} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{8.9}$$

Por tanto, para resolver cualquier problema bajo este supuesto de aceleración constante será necesario elegir convenientemente el sistema de referencia cartesiano, expresar en éste los vectores que entran a formar parte de la ecuación del movimiento y la velocidad e ir resolviendo las oportunas cuestiones planteadas; buena parte de las cuales pasan por deducir un determinado instante de tiempo (momento en el que un objeto llega al suelo o alcanza una altura máxima, se cruza con otro móvil, supera un determinado obstáculo, etc).

8.5. Movimiento circular

Un caso que merece especial atención es aquel en el que el móvil describe una circunferencia de radio R en su recorrido. En este caso conviene expresar el ángulo que barre el móvil en su movimiento (θ), el cual se mide en radianes. Ante un ángulo barrido infinitesimal, se puede asociar un espacio infinitesimal recorrido sobre la circunferencia dado por:

$$ds = Rd\theta. \tag{8.10}$$

La variación del ángulo barrido con el tiempo es la denominada velocidad angular (ω) que expresaremos en rad/s, si bien es frecuente encontrarla dada en *revoluciones por minuto* o rpm. Se define el vector velocidad angular como aquel que es perpendicular al plano de la circunferencia y con sentido el avance del sacacorchos o tornillo que gire como lo hace el móvil en la circunferencia. En el movimiento circular el módulo de esta velocidad angular y el de la velocidad instantánea vienen relacionados por:

$$v = \omega R. \tag{8.11}$$

Obviamente podemos definir una aceleración angular, cuyo módulo es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{8.12}$$

Esta aceleración se mide en rad/s^2 y es un vector con la misma dirección que el vector velocidad angular, aunque con sentido contrario si el cuerpo está desacelerando en su giro.

Al igual que antes podemos obtener expresiones de la velocidad angular y el ángulo barrido cuando la aceleración angular sea constante:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \tag{8.13}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{8.14}$$

Finalmente, en este tipo de movimiento podemos obtener las expresiones de las componentes intrínsecas de la aceleración de forma sencilla:

$$a_{\mathrm{t}} = R\alpha \tag{8.15}$$

$$a_{\mathrm{n}} = \omega^2 R \tag{8.16}$$

Ejercicios y problemas

1. La ecuación de movimiento de un determinado punto material viene dada por $x(t) = 4t^2 + 2t + 8$, con x en metros cuando t está en segundos. Calcular: a) La posición inicial; b) la velocidad al cabo de 2 segundos; c) la aceleración en ese mismo instante.

2. La ecuación de movimiento de un determinado punto material que se desplaza por el eje OX viene dada por $x(t) = t^2 - 6t + 5$, con x en metros cuando t está en segundos. Calcular el espacio recorrido por el móvil tras los 5 primeros segundos de movimiento.

3. Dada la ecuación de movimiento y(t)=10t^2+5t-4, con y en metros cuando t está en segundos, calcular: a) El espacio recorrido por el móvil y su velocidad al cabo de 4 segundos de iniciado el movimiento; b) el espacio recorrido durante el cuarto segundo de movimiento.

4. La aceleración del movimiento de una partícula que se mueve por el eje OX viene dada por la expresión $a(t) = 24t^2 - 6$, con a en m/s^2 cuando t viene dado en segundos. Sabiendo que en el instante en que el cronómetro comienza a contar el tiempo, la partícula se encuentra a 5 m del origen y que al cabo de 2 segundos su velocidad es de 36 m/s, calcular: a) la ecuación de la velocidad; b) la ecuación de movimiento; c) la velocidad media entre los instantes t=1 y t=3.

5. Un objeto que se mueve con una aceleración uniforme tiene una velocidad de 12 cm/s con sentido del eje X positivo cuando su posición es x = 3 cm. Si 2 s más tarde su coordenada x es -5 cm, ¿cuál es su aceleración?

6. Un punto recorre la curva $x(t) = t^3 - 3t + 1$; $y(t) = 3t^2$ siendo t el tiempo. Hallar: a) Vector velocidad y su módulo. b) Componentes intrínsecas de la aceleración c) Radio de curvatura.

7. Una partícula se desplaza a través de un plano XY con una velocidad $\mathbf{v} = (2t-2)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, expresada en unidades del S.I. Cuando t=2 s su vector de posición es $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determinar la ecuación de la trayectoria de dicha partícula.

8. La posición angular de una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia de 5 cm de radio está dada por la expresión $\theta = 3t^2$ donde θ se da en radianes y t en segundos. Calcular las aceleraciones tangencial, normal y total de la partícula cuando $t = 0.5$ s.

9. Un volante gira a razón de 60 rpm y al cabo de 5 segundos posee una velocidad angular de 37.7 rad/s. ¿Cuántas vueltas dio en ese tiempo?

10. Deducir las velocidades, supuestas constantes, de dos móviles A y B, separados por una distancia de 30 km, sabiendo que si se mueven en la misma dirección, se

encuentran a 10 km de B; pero que si se mueven en sentidos opuestos tardan 40 minutos en encontrarse.

11. Dos cuerpos, A y B, separados por una distancia de 2 km, salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con movimiento uniformemente variado, siendo la aceleración del mas lento (B), de 0.32 cm s-2. El encuentro se realiza a 3,025 km de distancia del punto de partida de B. Calcular: a) el tiempo invertido por ambos móviles; b) la aceleración de A

12. Desde un punto situado a 10 m sobre el suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 30 m/s. Calcular la velocidad con la que llegará al suelo.

13. Un globo que se eleva verticalmente con una velocidad de 4.8 m/s abandona un saco de lastre en el instante en que el globo se encuentra a 19.2 m sobre el suelo. Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad en ese instante.

14. Desde un punto situado a 100 m sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 400 m/s. Calcular: a) tiempo que tarda en llegar al suelo; b) velocidad con la que llegará al suelo.

15. Se dispara un proyectil con una velocidad de 600 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular: a) altura máxima; b) tiempo en alcanzar dicha altura; c) alcance del proyectil.

16. Un avión en vuelo horizontal a 300 m de altura viaja a 72 m/s y desea hacer blanco en un barco que se desplaza a 24 m/s en el mismo sentido que el avión. Determinar: a) Distancia del barco a la que debe soltar la bomba para lograr el impacto. b) Tiempo que tarda la bomba desde que se suelta hasta que hace impacto. c) Ángulo que forma la velocidad de la bomba con la horizontal en el momento del impacto.

17. Se dispara un proyectil a una distancia de 500 m de la cima de una montaña con 300 m de altura. Si se quiere que el proyectil rebase la montaña calcular el ángulo y velocidad inicial mínimos de lanzamiento.

18. Se deja caer un guijarro en un pozo de agua y el ruido que hace al chocar con el agua se escucha 16 s más tarde. Estimar la distancia aproximada desde el borde del pozo hasta la superficie del agua. Dato: velocidad del sonido 340 ms^{-1}.

19. Una vez más, el coyote persigue al escurridizo correcaminos. El coyote lleva un par de patines a reacción marca ACME que le proporcionan una aceleración horizontal constante de 15 m/s^2. El coyote se encuentra parado a 70 m del borde de un precipicio en el momento en el que el correcaminos le adelanta en dirección al precipicio. a) Si el correcaminos se mueve con velocidad constante, determinar la velocidad mínima que debe alcanzar para llegar al precipicio antes que el coyote. Al borde

del precipicio, el correcaminos da la vuelta rápidamente y el coyote continúa moviéndose en línea recta. Sus patines permanecen en dirección horizontal y continúan funcionando mientras que se encuentra en el aire. b) Si el precipicio está 100 m por encima del suelo de un cañón, determinar dónde caerá el coyote dentro del cañón. c) Determinar las componentes del vector velocidad en el momento del impacto del coyote contra el suelo.

20. Un jugador de rugby lanza un balón a otro jugador, con una velocidad inicial de módulo 20 m/s y un ángulo de 30°. En dicho instante el jugador que va a recibir el balón se encuentra a 20 m del otro. ¿En qué dirección y con qué velocidad constante debe correr el jugador que recibe el balón, para atrapar el balón a la misma altura a la que fue lanzado?

Capítulo 9

Dinámica

9.1. Las leyes de Newton

Nos vamos a centrar en el estudio de la dinámica del punto material. El punto material es un modelo matemático para describir un sistema físico consistente en un cuerpo (o cuerpos) con una extensión espacial tan pequeña que podemos tomarlo como puntual, pero dotado de masa. En esas condiciones, el sistema objeto de estudio se compone de un cierto número de "*masas puntuales*", $\{m_i\}$, cada una de las cuales queda cinemáticamente descrita por su "*vector de posición*" o "*radio-vector*", $\{\mathbf{r_i}(t)\}$.

Por tanto, el objeto de la Dinámica aplicada a éste modelo consistirá en definir cinemáticamente el sistema para todo tiempo a partir de la configuración inicial del sistema. Es decir, conocidas las posiciones de todas las masas puntuales en un instante dado, $\mathbf{r_i}(t=0)$, determinar los "*radio-vectores*" $\mathbf{r_i}(t)$.

El problema fue formulado en estos términos y resuelto por **Isaac Newton**, que introdujo sus famosas tres leyes del movimiento:

- **Primera ley o principio de inercia:** Todo cuerpo en estado *inercial*, es decir con velocidad constante o nula, mantendrá constante dicha velocidad mientras no se interaccione con él.

- **Segunda ley o principio fundamental de la dinámica:** La interacción ejercida sobre el punto material se realiza a través de *fuerzas* que modifican el estado de inercia, de tal modo que la suma de todas las *fuerzas* es proporcional a la aceleración de dicho punto,

$$\sum_i \mathbf{F_i} \;=\; m\,\mathbf{a} \;= m\,\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}, \tag{9.1}$$

  siendo la constante de proporcionalidad, m, la masa del cuerpo.

- **Tercera ley o principio de acción y reacción:** Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo, éste ejercerá sobre el primero una *fuerza de reacción* de igual módulo y dirección a la primera pero sentido opuesto.

No obstante, únicamente la segunda de dichas leyes lo es realmente, pudiendo deducirse la primera y la tercera de la segunda. Por ejemplo, la primera de las leyes se deriva de la segunda en el caso particular de que ninguna fuerza actúe sobre el cuerpo (o de que todas ellas se compensen),

$$\sum_i \mathbf{F_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{v} = 0 \;\text{ ó }\; \mathbf{v} = \text{cte} \quad . \tag{9.2}$$

De este modo, determinar la evolución de un sistema con n masas puntuales exigirá aplicar la ecuación (9.1) a cada una de las masas que componen dicho sistema.

9.2. Fuerzas

La aplicación de la segunda ley nos demanda el conocimiento de las fuerzas que actúan sobre todos los cuerpos o masas puntuales que componen nuestro sistema. Las fuerzas son el resultado de la interacción fundamental de unas partículas con otras. Dicha interacción se efectúa por medio de *campos de fuerza* generados por las partículas en función de sus propiedades. Las interacciones fundamentales se reducen a cuatro: *Gravedad, Electromagnetismo, Interacción Nuclear Fuerte e Interacción Nuclear Débil.* No obstante, cuando los sistemas que se estudian son muy complejos, se emplean *fuerzas efectivas* que dan cuenta a través de un único vector el resultado de una suma complicada de interacciones. Un ejemplo claro de esto son las llamadas *fuerzas de contacto* entre objetos.

En este tema, nos concentraremos únicamente en dos tipos de fuerzas, *el peso* (fuerza con la que la gravedad de la tierra atrae a una masa) que aproximaremos siempre por:

$$\mathbf{F} \;=\; m\mathbf{g} \tag{9.3}$$

siendo el módulo de la aceleración de la gravedad, $|\mathbf{g}| = 9.8$ m s^{-2} y su dirección y sentido los de la acción de dicha gravedad; y las *fuerzas de contacto*. De entre estas últimas destacaremos:

- **Normales:** fuerzas de reacción a la acción del peso de los cuerpos sobre las superficies en las que reposan.

- **Tensiones:** fuerzas en los extremos de hilos o cables inextensibles que, actuando en la dirección del cable, se oponen a su extensión.

- **Fuerzas de rozamiento:** fuerzas de fricción que se oponen al deslizamiento de unas superficies sobre otras. Se define para ellas un índice de rozamiento, μ, tal que

$$f_R \ = \ \mu N \ , \tag{9.4}$$

donde N es el módulo de la *Normal* a la superficie sobre la que desliza el cuerpo. La dirección de dicha fuerza es la de movimiento y su sentido el opuesto al mismo.

Las fuerzas que consideraremos, por tanto, serán independientes del tiempo y consecuentemente lo serán las aceleraciones.

9.3. Ejemplo: el problema de Galileo

Resolvamos, como ejemplo, el problema de un cuerpo en caída libre (es decir, sometido a la única acción de la gravedad terrestre).

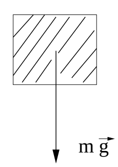


Figura 9.1: Peso actuando sobre una masa.

El cuerpo, considerado puntual, con masa m, siente únicamente la fuerza *peso*. Por tanto el segundo principio nos dirá:

$$m\mathbf{g} \ = \ m\mathbf{a} \ . \tag{9.5}$$

Por tanto, la solución del problema de un cuerpo en caida libre es que su aceleración constante viene dada por la aceleración de la gravedad: $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Ejercicios y problemas

1. El motor de un camión de 2.5 toneladas genera una fuerza constante de 5000 N a lo largo de 15 segundos. Si partió del reposo, ¿ qué velocidad alcanza el camión al cabo de esos 15 segundos? ¿ Cuál sería la respuesta de verse frenado el camión por una fuerza de rozamiento dada por un coeficiente $\mu = 0.1$?

2. ¿ Qué fuerza constante debe generar el motor de un coche de 800 kg para ser cápaz de pasar de 0 a 100 Km/h en 10 segundos? ¿Cuál sería la respuesta si consideramos una fuerza de rozamiento dada por $\mu = 0.3$?

3. ¿Qué fuerza por unidad de masa tendría que generar el motor de un vehículo para permitirle subir con velocidad constante una pendiente del 15 % con rozamiento despreciable?

4. Un plano inclinado de ángulo regulable posee un coeficimiento de rozamiento estático (para un cuerpo en reposo) $\mu = 0.5$ y un coeficiente de rozamiento dinámico (para un cuerpo en movimiento) $\mu = 0.3$. Se coloca una masa en dicho plano inclinado y se incrementa muy lentamente el ángulo hasta que el cuerpo empieza a deslizar. ¿Cuál es la aceleración de caída?

5. Si te pesas usando una báscula de baño en el interior de un ascensor y observas que tu peso aparece incrementado en un 20 %, ¿Cuál es la aceleración del ascensor? ¿sube o baja?

6. En una curva, de radio de curvatura ρ, ¿Cuál será la velocidad máxima a la que podría tomarse dicha curva con un vehículo para el cual existe un rozamiento con la carretera dado por un coeficiente μ?

   Expresa el resultado en función de ρ y μ.

7. En el poblema anterior, ¿Cuál sería la velocidad de no existir rozamiento? Si la curva estuviese *peraltada*, de tal modo que la carretera se empina de dentro a afuera con un ángulo α, ¿Cuál sería la velocidad?

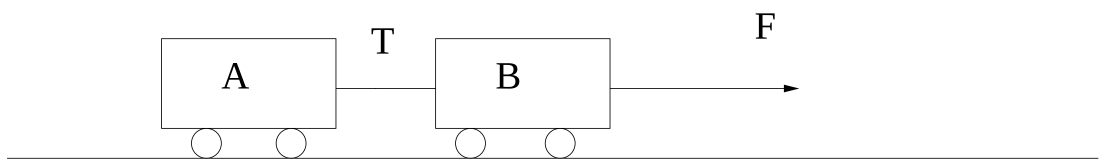
8. Un plano inclinado tiene 2 m de altura y 5 m de largo. Sobre este se encuentra un bloque de piedra (100 N de peso) detenido por un obstáculo fijo. Halla la fuerza que el bloque ejerce sore (a) el obstáculo y (b) el plano.

9. Una esfera de 50 kg de masa está apoyada en dos planos inclinados lisos (inclinados respectivamente respecto a la horizontal 30 ° y 40 °). Cálcule las fuerzas que los dos planos ejercen sobre la esfera.

10. Una persona cuya masa es de 60 kg se encuentra en un ascensor. Determina la fuerza que ejerce el piso del ascensor sobre dicha persona cuando el ascensor: (a) sube con

movimiento uniforme, (b) baja con movimiento uniforme, (c) acelera subiendo a 3 m s^{-2} y (d) acelera bajando a 3 m s^{-2}.

11. Los cuerpos A y B de la figura tienen unas masas de 10 y 15 kg respectivamente. Cálcula la tensión del cable y la aceleración del sistema si se aplica una fuerza F igual a 50 N.

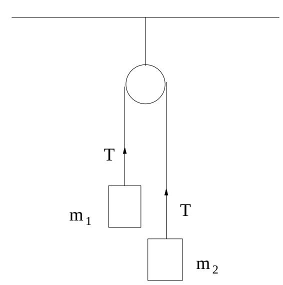


12. Un cuerpo de 1 kg de masa se encuentra en un plano inclinado liso que forma un ángulo de 30 ° con la horizontal. ¿Qué aceleración tendrá el cuerpo y con qué sentido si se le aplica una fuerza de 8 N paralelamente al plano y dirigida hacia (a) arriba y (b) abajo?

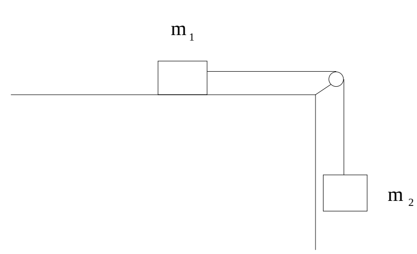
13. Resuelve el problema anterior considerando que la misma fuerza externa se aplica paralelamente al suelo y dirigida hacia (a) dentro de plano y (b) hacia fuera.

14. Resuelve el problema anterior considerando ahora que el plano inclinado no es liso y existe un coeficiente de rozamiento con el cuerpo $\mu = 0.3$.

15. Determina las aceleraciones y la tensión en función de m_1 y m_2, sabiendo que despreciamos la masa de la polea.

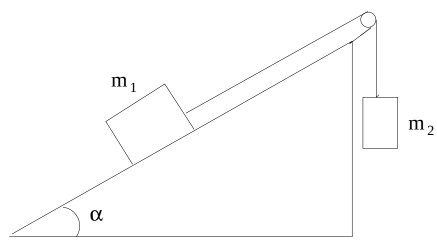


16. Determina las aceleraciones y las tensiones sabiendo que las masas son $m_1 = 50$ kg y $m_2 = 30$ kg y que las superficies son lisas y sin rozamiento.



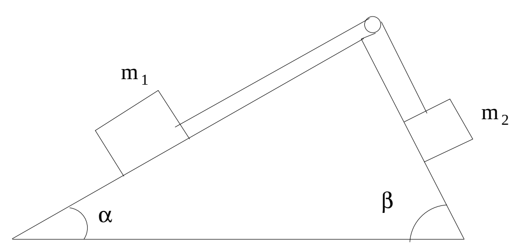
17. Resuelve el problema anterior considerando un coeficiente de rozamiento entre la masa m_1 y la superficie $\mu = 0.2$.

18. Determina las aceleraciones y las tensiones sabiendo que las masas son $m_1 = 40$ kg y $m_2 = 30$ kg, que las superficies son lisas y sin rozamiento, y que $\alpha = 30°$.



19. Resuelve el problema anterior en el caso de que el coeficiente de rozamiento entre m_1 y el plano sea $\mu = 0.3$.

20. Determina las aceleraciones y las tensiones sabiendo que las masas son $m_1 = 40$ kg y $m_2 = 30$ kg, que las superficies son lisas y sin rozamiento, y que $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$.



Capítulo 10

Trabajo y energía

Podemos definir la **energía** como aquella propiedad de los sistemas materiales en virtud de la cual éstos pueden transformarse, modificando su condición o estado, así como actuar sobre otros originando en ellos procesos de transformación.

La energía está asociada a procesos de transformación; calor y trabajo no son sino manifestaciones de intercambio de energía entre sistemas. Conviene resaltar el carácter conservativo de la misma, desde el punto de vista de la cantidad. Contrariamente, ambientalmente es de enorme interés reseñar la no conservación de la energía en términos de calidad; es decir, su carácter degradable. Así, esta magnitud adquiere una gran importancia en una sociedad industrial, como la que vivimos, que viene a ser como una enorme máquina de degradar energía de alta calidad hasta convertirla en calor.

10.1. Trabajo y potencia

El **trabajo** es una medida de la cantidad de energía transferida a un sistema en un proceso físico en el que actúa una fuerza sobre el sistema y se produce un desplazamiento. Se define como:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.1)$$

Las dimensiones del trabajo (o las de cualquier energía), son $\mathrm{ML^2T^{-2}}$. La unidad en el Sistema Internacional es el Julio, ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$). Otras unidades para el trabajo son el ergio, $1\,\mathrm{J} = 10^7$ ergio, y el $\mathrm{kW\,h} = 3,6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$. Si la fuerza aplicada es constante, se puede escribir que:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = Fr\cos\theta \qquad (10.2)$$

donde θ es el ángulo que existe entre la línea de aplicación de la fuerza y el desplazamiento.

Se define la **potencia** como el trabajo realizado por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{10.3}$$

Las dimensiones de la potencia son $\mathrm{ML^2T^{-3}}$, y su unidad en el Sistema Internacional es el watio, $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$.

10.2. Energía cinética y teorema del trabajo

Se define la **energía cinética** como la energía que tiene un cuerpo por desplazarse con cierta velocidad. La expresión matemática de la energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.4}$$

El trabajo que realiza la fuerza resultante que actúa sobre un sistema para desplazarlo, de A hasta B, es la variación de energía cinética que experimenta el sistema, cuando pasa de A a B:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{10.5}$$

Este resultado es el teorema de las fuerzas vivas, que permite entender el trabajo como transferencia de energía. Vemos, por tanto, que la energía cinética se puede relacionar directamente con una capacidad para realizar trabajo.

10.3. Energía potencial

Se dice que una fuerza es **conservativa** si el trabajo realizado por dicha fuerza no depende del camino seguido. Dicho de otro modo, si un cuerpo se desplaza desde un punto A hasta otro B bajo la acción de una fuerza conservativa el trabajo realizado por dicha fuerza es el mismo, independientemente del itinerario seguido por el cuerpo.

$$W_{(i)} = \int_{A,C(i)}^{M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.6}$$

donde $C(i)$ representa el camino a lo largo del cual se realiza la integración (véase figura 10.1). Si la fuerza es conservativa se cumple entonces que:

$$W_{(1)} = W_{(2)} = W_{(3)}. \tag{10.7}$$

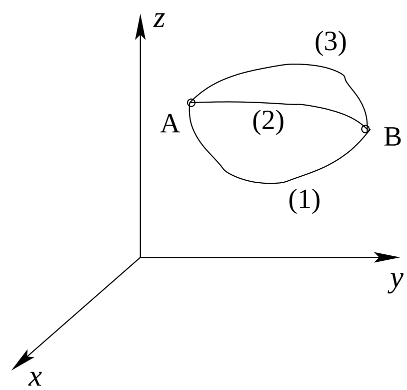


Figura 10.1: Representación esquemática de diferentes caminos de integración.

Existen en la naturaleza muchos ejemplos de fuerzas conservativas. He aquí algunos de los ejemplos más importantes:

- **Fuerzas elásticas** $\rightarrow \mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.
- **Fuerza gravitatoria** $\rightarrow \mathbf{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}$.
- **Fuerza eléctrica** $\rightarrow \mathbf{F} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{u}$.

Consideremos una fuerza conservativa cualquiera. A partir de ella se puede definir una nueva magnitud física, la **energía potencial**, asignando en cada punto del espacio una función E_p a través de la definición:

$$W_{A\rightarrow B} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = E_{p_A} - E_{p_B}. \qquad (10.8)$$

En el caso concreto de una partícula puntual de masa m en movimiento en las proximidades de la superficie terrestre, esto es, a una altura h pequeña en comparación con el radio terrestre R_T ($h << R_T$), la expresión la energía potencial gravitatoria es la siguiente:

$$E_p = mgh, \qquad (10.9)$$

donde g es el valor de la gravedad terrestre en su superficie.

10.4. Principio de conservación de la energía

Cuando en un sistema interacciona únicamente a través de fuerzas conservativas, se cumple el denominado **principio de conservación de la energía mecánica**:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}, \qquad (10.10)$$

donde A y B representan dos momentos cualesquiera en la evolución de la partícula, y E_{p_A} y E_{p_B} la suma de todas las energías potenciales que tenga el cuerpo en los puntos A y B. Particularizando para un movimiento sin rozamiento de un sistema bajo el campo gravitatorio terrestre se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \tag{10.11}$$

El principio de conservación de la energía establece que la energía mecánica del sistema permanece constante en todo instante de tiempo, siendo la energía mecánica la suma de la energía cinética y potencial.

Cuando sobre el sistema actúan fuerzas no conservativas (por ejemplo, fuerzas de rozamiento), no se verifica el principio de conservación de la energía. Sin embargo, se puede generalizar el resultado del sisguiente modo. El trabajo de la fuerza resultante se puede expresar como suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas y por las no conservativas:

$$W = W_c + W_{nc}, \tag{10.12}$$

Además, en general se cumple que $W = -\Delta E_c$, y para la fuerzas conservativas se puede escribir $W_c = -\Delta E_p$. Sustituyendo queda:

$$W_c + W_{nc} = \Delta E_c = -\Delta E_p + W_{nc} \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = W_{nc}. \tag{10.13}$$

Ejercicios y problemas

1. Un niño arrastra un trineo durante 100 m. Para hacerlo tira de una cuerda con una fuerza de 80 N formando un ángulo con el suelo de 30°. ¿Cuál es el trabajo producido?

2. Calcule la potencia que debe tener una bomba de agua para ascender mil litros de agua por minuto a una altura de 10 m.

3. Un montacargas tiene una masa de 500 kg y admite una carga de 5500 kg. El montacargas sube, a velocidad constante, diez pisos en un minuto. Calcule: (a) La potencia que consume cuando sube vacío; (b) la potencia que consume a plena carga.

4. La fuerza elástica en los muelles obedece a la ley de Hooke, $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$. Supongamos que un sistema sujeto a un muelle, de constante elástica $k = 1000\,\mathrm{N/m}$, se desplaza desde la posición $x = 0$ a la posición $x = 0.04\,\mathrm{m}$. ¿Qué trabajo realiza la fuerza elástica durante ese desplazamiento?

5. Se aplica una fuerza horizontal de 100 N a un cuerpo de 2 kg que está inicialmente en reposo. ¿A qué velocidad se moverá al cabo de 20 m?

6. Una fuerza de 10 N actúa sobre un cuerpo de 2 kg que se encuentra en reposo, haciéndole recorrer 5 m a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento. (a) ¿Cuánto vale el trabajo realizado? (b) ¿Cuánto vale el incremento de la energía cinética? (c) ¿Cuál es la energía cinética final del cuerpo?

7. Un cuerpo desliza sin rozamiento por una pista de hielo. Si parte del reposo desde una altura de 7 m sobre el suelo. ¿A qué velocidad estará cuando se encuentre tan solo a 1 m sobre el suelo?

8. Dejamos caer desde el reposo un cuerpo de masa m por una rampa inclinada un ángulo θ, desde una altura h. Si la rampa presenta un coeficiente de rozamiento μ, calcule la velocidad a la que llegará al suelo.

9. Se tira de una vagoneta de 20 kg mediante una cuerda que forma un ángulo de 30° con la dirección de la vía, ejerciendo una fuerza de 50 N a lo largo de una distancia de 50 m. La fuerza de rozamiento entre la vía y las ruedas es la décima parte del peso. Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre la vagoneta.

10. Un cuerpo de 2 kg de masa desciende por un plano inclinado 30° con una velocidad constante de 0.5 m/s. (a) Calcule el trabajo total realizado sobre el cuerpo; (b) obtenga el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

11. Un cuerpo de 10 kg descansa sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y la superficie es de $0,2$, (a) ¿qué fuerza horizontal hay que aplicar para desplazar el cuerpo 5 m a velocidad constante? (b) ¿Qué trabajo se realiza?

12. Si en el problema anterior se aplica una fuerza que le produce al cuerpo una aceleración de $5\,\mathrm{m/s^2}$. ¿Qué trabajo se efectúa al desplazarlo esos 5 m?

13. Un péndulo de longitud $L = 20\,\mathrm{cm}$ y de masa $m = 100\,\mathrm{g}$ se deja caer desde una posición inicial horizontal. Calcule la velocidad en el punto más bajo de su trayectoria.

14. Se deja caer un cuerpo deslizando por un plano inclinado 30° partiendo del reposo. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es 0.2, calcule la velocidad del cuerpo cuando haya recorrido 3 m sobre el plano.

15. Un bloque de 2 kg situado a 5 m de altura desliza, partiendo del reposo y sin rozamiento por el plano inclinado. A continuación recorre 6 m sobre una superficie horizontal hasta que se para. (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque al finalizar la rampa? (b) ¿Qué trabajo realiza el rozamiento sobre el bloque? (c) ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal?

16. Un bloque de 2 kg se lanza a lo largo de una superficie horizontal rugosa ($\mu = 0.2$) con una velocidad de 20 m/s. Una vez ha recorrido el bloque 5 m por la superficie horizontal, encuentra una rampa inclinada 30° con respecto a la horizontal, que posee el mismo coeficiente de rozamiento. ¿Hasta qué altura sobre el plano inclinado llegará la masa?

17. Un automóvil de 800 kg ejerce una fuerza de tracción de 1200 N y arrastra un remolque de 1000 kg con una cuerda. Si no hay rozamientos, calcule: (a) La aceleración del sistema; (b) la tensión de la cuerda de unión; (c) la energía cinética total después de recorrer 20 m desde el reposo; (d) la velocidad en ese momento.

18. Sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal se coloca un cuerpo de 100 g de masa cuyo coeficiente de rozamiento dinámico contra el plano es de 0.4. Se desea conocer la fuerza que provoca el deslizamiento, la aceleración de éste, la velocidad a los 5 segundos de iniciado el movimiento y el espacio recorrido en ese tiempo. Compruebe que se cumple el principio de conservación de la energía, calculando las variaciones de energía potencial y cinética, así como el trabajo realizado por el rozamiento.

19. Un ciclista, junto con su bici y equipo, pesa 800 N. Partiendo del reposo sobre un camino horizontal, tarda un minuto en alcanzar la velocidad de 18 km/h, ejerciendo una fuerza que puede suponerse constante. Todos los rozamientos equivalen a una fuerza constante de 150 N. Calcule la fuerza que ejerce el ciclista. Calculad el trabajo

realizado por el ciclista durante ese minuto y la potencia media desarrollada. Si una vez alcanzada esa velocidad deja de pedalear, ¿qué distancia recorrerá todavía?

20. Calcule el trabajo efectuado por un hombre que arrastra un saco de harina de 65 kg por 10 m a lo largo del piso con una fuerza de 25 kg y que luego lo levanta hasta un camión cuya plataforma está a 75 cm de altura. ¿Cuál es la potencia promedio desarrollada si el proceso entero tomó 2 minutos?

21. Se emplea un helicóptero para elevar desde el océano verticalmente hasta 200 m a un astronauta de 69 kg por medio de un cable. La aceleración del astronauta es $g/10$. (a) ¿Qué trabajo realiza el helicóptero sobre el astronauta? (b) ¿Qué trabajo hace la fuerza gravitacional sobre el astronauta? (c) ¿Cuál es la energía cinética del astronauta un momento antes de llegar al helicóptero?

22. Un hombre que va corriendo tiene la mitad de la energía cinética de un niño que tiene la mitad de su masa. El hombre aumenta su velocidad en 1 m/s y entonces adquiere la misma energía cinética que el niño. ¿Cuáles eran las velocidades iniciales del hombre y del niño?

Capítulo 11

Otros principios de conservación

11.1. Cantidad de movimiento

Se define la **cantidad de movimiento** o el **momento lineal** de una partícula puntual como el producto de su masa por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{11.1}$$

donde m es la masa de la partícula y $\mathbf{v}$ es la velocidad respecto a un sistema de referencia inercial. Obviamente, $\mathbf{p}$ es una magnitud vectorial, que tiene la misma dirección y sentido que la velocidad. Sus dimensiones son MLT^{-1} y en el Sistema Internacional las unidades de la cantidad de movimiento son $\mathrm{kg\,m/s}$.

11.1.1. Impulso y cantidad de movimiento

Consideremos una partícula puntual sometida a una fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa durante un intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$, donde t_i y t_f son los instantes de tiempo inicial y final, respectivamente. Nótese que $\mathbf{F}$ puede ser una función del tiempo.

Se define el **impulso** de la fuerza $\mathbf{F}$ como la integral de la fuerza a lo largo del intervalo de tiempo durante el que actúa:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt \tag{11.2}$$

Se puede demostrar que el impulso obedece una ecuación completamente equivalente a la segunda ley de Newton. El **teorema de la cantidad de movimiento y el impulso** afirma que el impulso de una fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento que

experimenta la partícula:

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \mathbf{F}\, dt = \Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_{\mathrm{f}} - \mathbf{p}_{\mathrm{i}} \tag{11.3}$$

donde $\Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ es la variación de cantidad de movimiento que tiene lugar desde el instante inicial t_i y el final t_f. El vector impulso tiene por tanto la misma dirección y sentido que la variación de cantidad de movimiento. Las dimensiones del impulso son las mismas que las de la cantidad de movimiento (MLT^{-1}) y las unidades del impulso en el Sistema Internacional son kg m/s.

Para describir algunas situaciones físicas muy comunes usaremos la denominada **aproximación de fuerza impulsiva**, que consiste en suponer que alguna de las fuerzas ejercidas sobre una o varias partículas actúa durante un breve intervalo de tiempo pero es mucho más fuerte que cualquier otra fuerza presente. Esta aproximación implica que, durante el tiempo que actúa esta fuerza impulsiva, apenas se produce movimiento de la partícula o partículas del sistema, y se puede suponer que el resto de fuerzas no producen variación alguna en la cantidad de movimiento.

11.1.2. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Este principio de conservación constituye otro de los principios fundamentales de la Mecánica. Es válido tanto para sistemas formados por una partícula como para los formados por más de una partícula. Su enunciado se puede establecer del siguiente modo:

Si sobre un sistema no actúa una fuerza neta externa, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante, es decir:

$$\mathbf{P}_T = \sum_i \mathbf{p}_i \equiv \text{constante} \tag{11.4}$$

donde $\mathbf{p}_i$ es la cantidad de movimiento de cada una de las partículas i del sistema.

11.2. Colisiones

Durante una colisión o choque entre dos o más partículas se puede suponer que las fuerzas que la producen cumplen la **aproximación de fuerza impulsiva**. Dado que cualquier otra fuerza tiene un efecto despreciable sobre la cantidad de movimiento del sistema, se puede suponer que se cumple el **principio de conservación de la cantidad**

de movimiento. Para un sistema de dos partículas se puede escribir:

$$\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = \mathbf{p'_1} + \mathbf{p'_2} \tag{11.5}$$

donde los subíndices denotan a cada partícula. El miembro de la izquierda representa la cantidad de movimiento total antes de la colisión y el de la izquierda el de después de la colisión.

Las colisiones se suelen clasificar del siguiente modo:

1. **Colisión perfectamente elástica.** Se conserva la energía cinética del sistema durante la colisión. Se verifica por tanto:

$$E_{c_1} + E_{c_2} = E'_{c_1} + E'_{c_2} \tag{11.6}$$

   donde E_{c_i} y E'_{c_i} son las energías cinéticas de la partícula i antes y después del choque, respectivamente.

2. **Colisión inelástica**. No se conserva la energía cinética durante la colisión.

3. **Colisión completamente inelástica**. Se produce la máxima pérdida posible de energía cinética durante la colisión, de modo que las partículas tras el choque se mueven todas con la misma velocidad. Se puede escribir por tanto:

$$\mathbf{v'_1} = \mathbf{v'_2} \tag{11.7}$$

   donde $\mathbf{v'_1}$ y $\mathbf{v'_2}$ son las velocidades de las partículas 1 y 2 tras la colisión, respectivamente.

Para el caso de colisiones unidimensionales, en las que todas las partículas antes y después del choque se mueven en la misma dirección, se suele utilizar la relación que define el **coeficiente de restitución** e:

$$v'_2 - v'_1 = -e(v_2 - v_1) \tag{11.8}$$

11.3. Momento angular

Consideremos una partícula puntual de masa m, cuya posición y velocidad están definidas por los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente. Se define el **momento angular** de la partícula respecto al origen de coordenadas O del siguiente modo:

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \tag{11.9}$$

Es importante recordar que el momento angular depende del punto respecto al cual se calcula el momento. Asimismo, $\mathbf{L_0}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ simultáneamente. Sus dimensiones son $\mathrm{ML^2T^{-1}}$ y en el Sistema Internacional las unidades del momento angular son $\mathrm{kg\,m^2/s}$.

11.3.1. Principio de conservación del momento angular

El tercer principio de conservación más importante de la Mecánica lo constituye el denominado **principio de conservación del momento angular**, válido para sistemas formados por cualquier número de partículas. Se enunciado es el siguiente:

Si sobre un sistema de partículas no actúa un momento de fuerzas neto externo, el momento angular del sistema permanece constante:

$$\mathbf{L}_{T_0} = \sum_i \mathbf{L}_{i_0} \equiv \text{constante} \tag{11.10}$$

donde $\mathbf{L}_{i_0}$ es el momento angular de cada una de las partículas i del sistema. El subíndice O en la ecuación anterior indica el punto respecto al cual se evalúan los momentos angulares.

Ejercicios y problemas

1. Un coche se detiene en un semáforo. Cuando el semáforo cambia a verde, el coche acelera, aumentando su velocidad desde 0 a $5,2\,\mathrm{m/s}$ en $0,832\,\mathrm{s}$. ¿Qué impulso lineal y qué fuerza media experimenta un pasajero del coche de masa igual a $70\,\mathrm{kg}$?

2. En una prueba de choque, un automóvil de masa $1500\,\mathrm{kg}$ choca contra una pared rígida. Las velocidades inicial y final del automóvil son $15\,\mathrm{m/s}$ hacia la pared y $2.6\,\mathrm{m/s}$ en sentido contrario. Si la colisión dura $0.105\,\mathrm{s}$, determine el impulso que sufre el coche durante la colisión y la fuerza media ejercida sobre el automóvil.

3. Un cuerpo de $80\,\mathrm{kg}$ se mueve a la velocidad constante de $10\,\mathrm{m/s}$. Si una fuerza constante y opuesta al movimiento actúa durante $4\,\mathrm{s}$ cambiando su velocidad hasta que ésta adquiere un valor de $2\,\mathrm{m/s}$ en sentido contrario, calcula: (a) el impulso que actúa sobre el cuerpo; (b) el valor de la fuerza en magnitud y sentido; (c) el momento lineal del cuerpo antes y después de actuar la fuerza.

4. Dos bloques de masas M y $3M$ se colocan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se fija un muelle de masa despreciable a uno de ellos y luego se comprimen uno contra otro los dos bloques, con el muelle entre ellos, sujetando los bloques mediante una cuerda. A continuación se rompe la cuerda, por lo que el bloque de masa $3M$ se mueve hacia la derecha con una velocidad de $2\,\mathrm{m/s}$. Determine la velocidad del bloque de masa M y la energía potencial elástica original del muelle si $M = 0.35\,\mathrm{kg}$.

5. Se deja caer una bola desde una altura h_0. El coeficiente de restitución de la bola en su choque contra el suelo es e. Calcule la altura alcanzada por la bola tras el choque n-ésimo con el suelo.

6. De acuerdo con las normas oficiales del tenis, una pelota aceptable para un torneo debe rebotar hasta una altura comprendida entre 173 y $183\,\mathrm{cm}$ cuando se deja caer libremente desde una altura de $254\,\mathrm{cm}$ a temperatura ambiente. ¿Cuál es el intervalo aceptable de valores del coeficiente de restitución para el sistema pelota-suelo?

7. Un coche de $1500\,\mathrm{kg}$ de masa, que viaja hacia el este con una velocidad de $25\,\mathrm{m/s}$, choca en un cruce con una furgoneta de $2500\,\mathrm{kg}$ que viaja hacia el norte con una velocidad de $20\,\mathrm{m/s}$. Determine la dirección y el módulo de la velocidad de ambos vehículos después de la colisión, suponiendo que ésta es completamente inelástica.

8. Un hombre de $80\,\mathrm{kg}$ y su hijo de $40\,\mathrm{kg}$ están parados juntos y de pie sobre una superficie de hielo lisa, en la cual es despreciable el rozamiento. Si después de que se empujen el uno al otro el padre se aleja con una velocidad de $0.5\,\mathrm{m/s}$ respecto al suelo, ¿a qué distancia estarán entre sí después de $5\,\mathrm{s}$?

9. Un cuerpo de masa m_1 se mueve con velocidad v_1 en línea recta hacia otro de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo. Determine la relación que debe existir entre m_1 y m_2 para que: (a) el primer cuerpo retroceda tras la colisión; (b) el primer cuerpo siga avanzando en el mismo sentido tras la colisión. Considere en todos los casos que la colisión es perfectamente elástica.

10. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección y sentidos opuestos uno hacia el otro con la misma velocidad v. Determine la relación que debe existir entre sus masas para que: (a) el primero retroceda tras la colisión; (b) el primero siga avanzando en el mismo sentido tras la colisión.

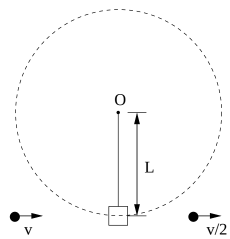
11. Una bola de billar, que se mueve a $5\,\mathrm{m/s}$, golpea a una bola inmóvil de la misma masa. Después de la colisión, la primera bola se mueve a una velocidad de $4,33\,\mathrm{m/s}$ con un ángulo de $30°$ con respecto a la línea de movimiento original. Suponiendo una colisión perfectamente elástica e ignorando el movimiento de rotación, calcule la velocidad de la bola golpeada tras el choque.

12. En una zona de una autovía se encuentran, en un instante determinado, cinco automóviles de masas $m_1 = 800\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1200\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 900\,\mathrm{kg}$, y $m_4 = 1000\,\mathrm{kg}$. Los dos primeros circulan en un sentido con velocidades respectivas $v_1 = 90\,\mathrm{km/h}$ y $v_2 = 85\,\mathrm{km/h}$. Los otros dos van en sentido opuesto con velocidades $v_3 = 120\,\mathrm{km/h}$ y $v_4 = 70\,\mathrm{km/h}$. Calcule la velocidad del centro de masas del sistema formado por los cuatro automóviles. ¿Qué velocidad debería llevar, y en qué sentido, un quinto automóvil de $900\,\mathrm{kg}$ para que el centro de masas del sistema formado por los cinco estuviese en reposo?

13. Un vagón de masa M se mueve sin rozamiento por una vía horizontal con velocidad inicial v_0. La superficie abierta del techo del vagón es A. Si comienza a llover con una intensidad I, medida en $\mathrm{l\,s^{-1}\,m^{-2}}$, calcule la velocidad del vagón en función del tiempo t que lleva lloviendo. Represente gráficamente el resultado.

14. Una chica de $45\,\mathrm{kg}$ se encuentra de pie sobre un tablón que tiene una masa de $150\,\mathrm{kg}$. El tablón se encuentra inicialmente en reposo y puede deslizarse libremente sobre la superficie plana de un lago helado (se puede suponer que no existe rozamiento entre el tablón y la superficie helada). La chica comienza a caminar a lo largo del tablón a una velocidad constante de $1,5\,\mathrm{m/s}$ respecto al tablón. Determine la velocidad de la chica respecto a la superficie helada y la velocidad del tablón respecto a la superficie helada.

15. Una bala de masa m, que se mueve con una velocidad v, pasa a través de un bloque de masa M que cuelga de un hilo saliendo con una velocidad $v/2$, como se indica en la figura. El hilo tiene una longitud L. >Cuál es el menor valor de v para el cual el péndulo completará una circunferencia completa?

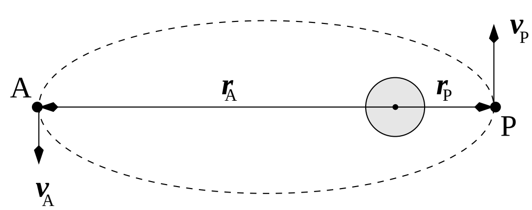


16. Un bloque de masa $m_1 = 1,6\,\mathrm{kg}$, que se mueve inicialmente hacia la derecha con una velocidad de $4\,\mathrm{m/s}$ sobre una pista horizontal sin rozamiento, colisiona con un muelle de masa despreciable unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2,1\,\mathrm{kg}$, que se mueve hacia la izquierda con una velocidad de $2,5\,\mathrm{m/s}$. Ambos bloques se dirigen uno hacia el otro. El muelle tiene una constante elástica de recuperación de $600\,\mathrm{N/m}$. Determine la velocidad de m_2 en el instante en que m_1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de $3\,\mathrm{m/s}$, así como la distancia máxima que se comprimirá el muelle durante la colisión.

17. Dos astronautas, cada uno de masa M, están conectados por una cuerda de longitud D y masa despreciable. Están aislados en el espacio, describiendo trayectorias alrededor de su centro de masa a una velocidad V. Tratando los astronautas como si fueran partículas puntuales, determine el módulo del momento angular total de los dos astronautas. Tirando de la cuerda uno de ellos, se acorta la distancia entre ambos hasta $D/2$. ¿Cuál es el nuevo momento angular del sistema? ¿Y las nuevas velocidades de los astronautas?

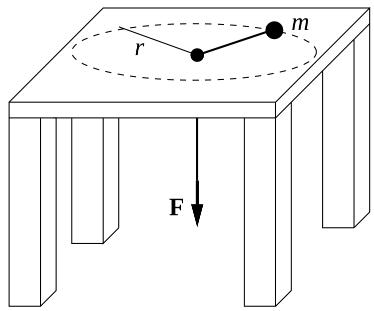
18. Unos astrónomos detectan un meteorito distante, que se mueve en línea recta a lo largo de una trayectoria que pasa a una distancia $3R_\mathrm{T}$ del centro de la Tierra, donde R_T es el radio terrestre. ¿Qué velocidad mínima deberá llevar el meteorito para que la gravedad de la Tierra no lo desvíe hasta el punto de chocar con nuestro planeta?

19. Un satélite se mueve describiendo una órbita elíptica alrededor de la Tierra, como se indica en la figura. Las distancias mínima y máxima a la superficie de la Tierra son 400 y 3000 km, respectivamente. Calcule la velocidad del satélite en el apogeo y en el perigeo.



20. Una partícula de masa m se mueve con velocidad v_0 en una circunferencia de radio r_0 sobre la superficie de una mesa sin rozamiento. La partícula está atada a una cuerda que pasa a través de un agujero de la mesa, como indica la figura adjunta.

Tirando de la cuerda lentamente hacia abajo, la partícula acaba moviéndose en una circunferencia de menor radio r_f. Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Determine la velocidad con la que se mueve el cuerpo de masa m cuando éste describe la trayectoria circular de radio r_f. Asimismo, determine la tensión de la cuerda cuando la partícula se está moviendo en una circunferencia de radio r.



Bibliografía

[1] M. Alonso and E.J. Finn. *Física*, volume I, Mecánica. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986. Manual en tres volúmenes (existe una versión más moderna condensada en un sólo volumen, ver referencias) que es una de las referencias clásicas para estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Resulta especialmente atractivo por lo riguros del tratamiento que se da a los temas y su concreción. El nivel resulta algo superior al exigido en clase. En este primer volumen se presentan los temas relativos al bloque de Mecánica Clásica.

[2] M. Alonso and E.J. Finn. *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995. Manual resultado de la fusión de los tres volúmenes de ediciones anteriores (ver referencias). Una de las referencias clásicas para estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Aunque al condensar los tres volúmenes en uno sólo se haya perdido parte del material, sigue siendo una referencia de interés porque profundiza algo más que otros manuales en el tratamiento de los temas.

[3] J. Catalá. *Física*. Cometa (Zaragoza), 1985.
Esta es una referencia clásica y algo anticuada en la presentación de los contenidos. Aún así resulta de gran interés, especialmente al tratar los bloques de Termodinámica y Mecánica de Fluidos. Trata los temas de forma rigurosa, dentro del nivel esperado, y tiene una buena colección de cuestiones y problemas.

[4] Santiago Burbano de Ercilla and Enrique Burbano García. *Problemas de Física*. Editorial Tébar, S.L. (Madrid), 2004.
Una referencia clásica cuando se trata de problemas de Física, contiene aproximadamente dos mil problemas convenientemente resueltos. El nivel resulta adecuado para un primer curso de licenciatura, aunque a veces resulte algo bajo.

[5] Richard P. Feynman, Robert R. Leighon, and Matthew Sands. *Física I: Mecánica, Radiación y Calor*. Addison Wesley Longman, 1999.
Este es el primer tomo de las famosas *Feynman's Lectures on Physics*, una magnífica serie de tres volúmenes con las notas de los cursos impartidos por R.P. Feynman en CalTech. En esta serie se presenta de forma novedosa y muy pedagógica los principios de la Física. Este volumen es el que se ocupa de Mecánica, Termodinámica y ondas.

Es una referencia avanzada y su nivel es superior al exigido, pero su consulta puede resultar muy beneficiosa para el estudiante.

[6] F.A. González. *La Física en problemas.* Editorial Tebar Flores (Madrid), 1981.
Libro de problemas de Mecánica, Termodinámica, Electromagnetismo, Óptica y Física Moderna.

[7] S. Gil and E. Rodríguez. *Física re-Creativa.* Prentice Hall (Buenos Aires), 2001.
Atractiva referencia, especialmente dirigida al docente, en la que se plantean diferentes experimentos de Física con especial atención al uso de recursos informáticos en las mismas.

[8] R. Resnick, D. Halliday, and K.S. Krane. *Física.* C.E.C.S.A, 2002.
Quinta edición del libro de David Halliday y Robert Resnick, uno de los manuales clásicos para la Física de los primeros cursos universitarios. Tiene gran prestigio por su exposición clara y exhaustiva. En esta edición se ha procurado mejorar su accesibilidad para lo cual los autores reescribieron gran parte del texto incluyendo además mayor numero de ejemplos prácticos y problemas para resolver por computadora. Se realizaron también importantes cambios en el aspecto pedagógico y el orden de los capítulos.

[9] R. A. Serway and J. W. Jewett Jr. *Física*, volume I: Mecánica, Oscilaciones y Ondas, Termodinámica. Thomson, 2003.
Tercera edición de una obra clásica de introducción a la Física General para estudiantes de primer curso universitario dividida en dos tomos. Su forma de enfocar los temas resulta especialmente interesante para aquellos alumnos que afrontan la asignatura con un insuficiente nivel matemático ya que el libro va introduciendo los conceptos y técnicas matemáticas más avanzadas a medida que se avanza. Opción alternativa al Sears/Zemansky, escogido como manual de referencia. Posee una interesante colección de ejercicios y problemas propuestos (más de 1600 ejercicios y más de 500 problemas en todo el libro). En este primer volumen se presenta el material relacionado con los bloques de Mecánica, Termodinámica y Oscilaciones y Ondas.

[10] R. A. Serway and J. W. Jewett Jr. *Física*, volume II: Electricidad y Magnetismo, Luz, Física Moderna. Thomson, 2003.
Segundo volumen de una obra clásica de introducción a la Física General escogido como manual alternativo al de referencia. Resulta de especial interés la sección dedicada a Física Moderna.

[11] F.W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, and R. A. Freedman. *Física Universitaria.* Addison-Wesley Iberoamericana (11ª Ed), Vol. I, 2004.
Este manual, que ha alcanzado su undécima edición, ha sido el escogido como manual de referencia para las dos asignaturas presentadas. El tratamiento de los temas resulta adecuado al nivel exigido. El desarrollo de los temas viene acompañado por

ejercicios resueltos de nivel similar al impartido en clase. Cada tema viene acompañado de un resumen y dispone de una excelente colección de cuestiones, ejercicios y problemas. Incluye las soluciones y distingue entre diferentes categorías y niveles de dificultad. Tiene pocas erratas y facilita bastante la tarea al alumno. Incluye en *ActivPhysics OnLine* ofrece suplementos al texto en la web que incluyen simulaciones y ejercicios conceptuales complementarios. Todo ello hace que resulte el libro escogido como manual de referencia. En este primer volumen incluye el material de los bloques de Mecánica, Termodinámica, Mecánica de Fluidos y Oscilaciones y Ondas.

[12] F.W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, and R. A. Freedman. *Física Universitaria*. Addison-Wesley Iberoamericana (11 Ed. Vol. II), 2004.
Segundo volumen del manual escogido como manual de referencia para las dos asignaturas presentadas. En este volumen se incluyen los temas relacionados con el bloque de Electricidad y Magnetismo. Se echa en falta en el tratamiento del tema de Física Moderna algunas notas sobre Física Cuántica.

[13] P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para la Ciencia y la Tecnología*, volume I: Mecánica, Oscilaciones y Ondas, Termodinámica. Reverté, 2005.
Primer volumen de la quinta edición de uno de los manuales clásicos para el estudio de la Física General, dedicado a los principios de Mecánica y Termodinámica. Las explicaciones son claras, tiene multitud de ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.

[14] P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para la Ciencia y la Tecnología*, volume II: Electricidad y Magnetismo, Luz y Física Moderna. Reverté, 2005.
Segundo volumen de una de las referencias clásicas para el estudio de la Física General. Este volumen se ocupa de los fenómenos de Óptica, Electromagnetismo y Física Moderna. Las explicaciones son claras, con multitud de ejemplos, ejercicios y problemas.

Apéndice A

Unidades y factores de conversión

TABLA A.1 **Factores de conversión**

Longitud

	m	cm	km	pulgada	pie	milla
1 metro	1	10^2	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0,393 7	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 kilómetro	10^3	10^5	1	$3{,}937 \times 10^4$	$3{,}281 \times 10^3$	0,621 4
1 pulgada	$2{,}540 \times 10^{-2}$	2,540	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pie	0,304 8	30,48	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milla	1 609	$1{,}609 \times 10^5$	1,609	$6{,}336 \times 10^4$	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^3	$6{,}852 \times 10^{-2}$	$6{,}024 \times 10^{26}$
1 gramo	10^{-3}	1	$6{,}852 \times 10^{-5}$	$6{,}024 \times 10^{23}$
1 slug	14,59	$1{,}459 \times 10^4$	1	$8{,}789 \times 10^{27}$
1 unidad de masa atómica	$1{,}660 \times 10^{-27}$	$1{,}660 \times 10^{-24}$	$1{,}137 \times 10^{-28}$	1

Nota: 1 tonelada métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	$1{,}667 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$3{,}169 \times 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1{,}667 \times 10^{-2}$	$6{,}994 \times 10^{-4}$	$1{,}901 \times 10^{-6}$
1 hora	3 600	60	1	$4{,}167 \times 10^{-2}$	$1{,}141 \times 10^{-4}$
1 día	$8{,}640 \times 10^4$	1 440	24	1	$2{,}738 \times 10^{-5}$
1 año	$3{,}156 \times 10^7$	$5{,}259 \times 10^5$	$8{,}766 \times 10^3$	365,2	1

Velocidad

	m/s	cm/s	pie/s	millas/h
1 metro por segundo	1	10^2	3,281	2,237
1 centímetro por segundo	10^{-2}	1	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$2{,}237 \times 10^{-2}$
1 pie por segundo	0,304 8	30,48	1	0,681 8
1 milla por hora	0,447 0	44,70	1,467	1

Nota: 1 milla/min = 60 millas/hora = 88 pies/s.

continúa

TABLA A.1 *Continuación*

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0,224 8
1 libra	4,448	1

Trabajo, Energía, Calor

	J	pie · libra	eV
1 julio	1	0,737 6	$6{,}242 \times 10^{18}$
1 pie · libra	1,356	1	$8{,}464 \times 10^{18}$
1 eV	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$1{,}182 \times 10^{-19}$	1
1 caloría	4,186	3,087	$2{,}613 \times 10^{19}$
1 btu	$1{,}055 \times 10^{3}$	$7{,}779 \times 10^{2}$	$6{,}585 \times 10^{21}$
1 kWh	$3{,}600 \times 10^{6}$	$2{,}655 \times 10^{6}$	$2{,}247 \times 10^{25}$

	cal	Btu	kWh
1 julio	0,238 9	$9{,}481 \times 10^{-4}$	$2{,}778 \times 10^{-7}$
1 pie · libra	0,323 9	$1{,}285 \times 10^{-3}$	$3{,}766 \times 10^{-7}$
1 eV	$3{,}827 \times 10^{-20}$	$1{,}519 \times 10^{-22}$	$4{,}450 \times 10^{-26}$
1 caloría	1	$3{,}968 \times 10^{-3}$	$1{,}163 \times 10^{-6}$
1 btu	$2{,}520 \times 10^{2}$	1	$2{,}930 \times 10^{-4}$
1 kWh	$8{,}601 \times 10^{5}$	$3{,}413 \times 10^{2}$	1

Presión

	Pa	atm
1 pascal	1	$9{,}869 \times 10^{-6}$
1 atmósfera	$1{,}013 \times 10^{5}$	1
1 centímetro de mercurio[a]	$1{,}333 \times 10^{3}$	$1{,}316 \times 10^{-2}$
1 libra por pulgada^2	$6{,}895 \times 10^{3}$	$6{,}805 \times 10^{-2}$
1 libra por pie^2	47,88	$4{,}725 \times 10^{-4}$

	cm Hg	lb/in.^{2}	lb/ft^2
1 pascal	$7{,}501 \times 10^{-4}$	$1{,}450 \times 10^{-4}$	$2{,}089 \times 10^{-2}$
1 atmósfera	76	14,70	$2{,}116 \times 10^{3}$
1 centímetro de mercurio[a]	1	0,194 3	27,85
1 libra por pulgada^2	5.171	1	144
1 libra por pie^2	$3{,}591 \times 10^{-2}$	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

[a] A 0 °C y en una ubicación donde la aceleración debida a la gravedad tenga su valor «estándar» de 9,806 65 m/s^2.

TABLA A.2 **Símbolos, dimensiones y unidades de las magnitudes físicas**

Magnitud	Símbolo de uso habitual	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidades en función de las unidades básicas del SI
Aceleración	**a**	m/s^2	L/T^2	m/s^2
Aceleración angular	α	rad/s^2	T^{-2}	s^{-2}
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)		
Área	A	m^2	L^2	m^2
Calor	Q	julio (J)	ML^2/T^2	$kg \cdot m^2/s^2$
Calor específico	c	$J/kg \cdot K$	$L^2/T^2 \cdot K$	$m^2/s^2 \cdot K$
Calor específico molar	C	$J/mol \cdot K$		$kg \cdot m^2/s^2 \cdot mol \cdot K$
Campo eléctrico	**E**	V/m	ML/QT^2	$kg \cdot m/A \cdot s^3$
Campo magnético	**B**	tesla (T) $(= Wb/m^2)$	M/QT	$kg/A \cdot s^2$
Cantidad de sustancia	n	mol		Mol
Capacidad	C	faradio (F)	Q^2T^2/ML^2	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$
Carga	q, Q, e	culombio (C)	Q	$A \cdot s$
Conductividad	σ	$1/\Omega \cdot m$	Q^2T/ML^3	$A^2 \cdot s^3/kg \cdot m^3$
Constante dieléctrica	κ			
Corriente	I	AMPERIO	Q/T	A
Densidad	ρ	kg/m^3	M/L^3	kg/m^3
Densidad de carga				
lineal	λ	C/m	Q/L	$A \cdot s/m$
superficial	σ	C/m^2	Q/L^2	$A \cdot s/m^2$
volumétrica	ρ	C/m^3	Q/L^3	$A \cdot s/m^3$
Densidad de corriente	**J**	A/m^2	Q/T^2	A/m^2
Desplazamiento	**r, s**	METRO	L	m
distancia	d, h			
longitud	ℓ, L			
Energía	E, U, K	julio (J)	ML^2/T^2	$kg \cdot m^2/s^2$
Entropía	S	J/K	$ML^2/T^2 \cdot K$	$kg \cdot m^2/s^2 \cdot K$
Flujo eléctrico	Φ_E	$V \cdot m$	ML^3/QT^3	$kg \cdot m^3/A \cdot s^3$
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML^2/QT	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$
Frecuencia	f	hercio (Hz)	T^{-1}	s^{-1}
Frecuencia angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Fuerza	**F**	newton (N)	ML/T^2	$kg \cdot m/s^2$
Fuerza electromotriz	ε	voltio (V)	ML^2/QT^2	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Inductancia	L	henrio (H)	ML^2/Q^2	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$
Longitud de onda	λ	m	L	m
Masa	m, M	KILOGRAMO	M	kg
Momento	**p**	$kg \cdot m/s$	ML/T	$kg \cdot m/s$
Momento angular	**L**	$kg \cdot m^2/s$	ML^2/T	$kg \cdot m^2/s$
Momento de inercia	I	$kg \cdot m^2$	ML^2	$kg \cdot m^2$
Momento dipolar eléctrico	**p**	$C \cdot m$	QL	$A \cdot s \cdot m$
Momento dipolar magnético	$\boldsymbol{\mu}$	$N \cdot m/T$	QL^2/T	$A \cdot m^2$
Número atómico	Z			
Par	$\boldsymbol{\tau}$	$N \cdot m$	ML^2/T^2	$kg \cdot m^2/s^2$
Periodo	T	s	T	s
Permeabilidad del espacio	μ_0	$N/A^2 (= H/m)$	ML/Q^2T	$kg \cdot m/A^2 \cdot s^2$
Permitividad del espacio	ϵ_0	$C^2/N \cdot m^2 (= F/m)$	Q^2T^2/ML^3	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^3$
Potencia	$\mathcal{P}$	vatio (W) $(= J/s)$	ML^2/T^3	$kg \cdot m^2/s^3$
Potencial	V	voltio (V) $(= J/C)$	ML^2/QT^2	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$

continúa

TABLA A.2 *Continuación*

Magnitud	Símbolo de uso habitual	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidades en función de las unidades básicas del SI
Presión	P	pascal (Pa) = (N/m^2)	M/LT^2	$kg/m \cdot s^2$
Resistencia	R	ohmio (Ω) (= V/A)	ML^2/Q^2T	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Trabajo	W	julio (J) (= N·m)	ML^2/T^2	$kg \cdot m^2/s^2$
Velocidad	v	m/s	L/T	m/s
Velocidad angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Volumen	V	m^3	L^3	m^3

[a] Las unidades básicas del sistema SI se especifican en mayúsculas.

[b] Los símbolos M, L, T, Q y K indican masa, longitud, tiempo, carga y temperatura, respectivamente.